Kementerian Pendidikan, Kebudayaan, Riset, dan Teknologi
Republik Indonesia, 2021

Buku Panduan Guru Matematika untuk SMA/SMK Kelas X

Penulis: Dicky Susanto, dkk

ISBN: 978-602-244-537-1

Bab 1

Panduan Khusus

Eksponen dan Logaritma

Pengalaman Belajar

Setelah mempelajari bab ini, siswa dapat:

1. Mengidentifikasi sifat-sifat eksponen.
2. Mengidentifikasi bentuk akar.
3. Mengidentifikasi fungsi eksponen.
4. Menyelesaikan permasalahan sehari-hari yang berkaitan dengan fungsi eksponen.
5. Mengidentifikasi sifat-sifat logaritma.
6. Menyelesaikan permasalahan sehari-hari yang berkaitan dengan logaritma.

Bab Eksponen dan Logaritma bertujuan mengembangkan kemampuan siswa untuk memahami dan bernalar mengenai eksponen dan logaritma. Siswa dapat mengidentifikasi sifat-sifat eksponen dan logaritma, serta bentuk akar. Siswa juga dapat merepresentasikan fungsi eksponen dan menyelesaikan masalah yang terkait dengan fungsi eksponen. Siswa juga diharapkan mampu mengidentifikasi hubungan antara eksponen dan logaritma. Banyak masalah dalam kehidupan sehari-hari yang berkaitan dengan eksponen dan logaritma. Siswa diharapkan mampu menggunakan eksponen dan logaritma untuk menyelesaikan permasalahan tersebut. Fungsi logaritma akan dibahas di kelas selanjutnya.

Pada subbab A siswa akan melakukan berbagai eksplorasi yang terkait dengan eksponen. Siswa diberi suatu permasalahan dan memodelkan permasalahan tersebut sebagai suatu bentuk eksponen. Selanjutnya siswa diajak untuk memahami bagaimana sifat-sifat eksponen dan membuktikan sifat-sifat tersebut melalui eksplorasi yang diberikan. Siswa kemudian melanjutkan eksplorasi permasalahan yang terkait dengan fungsi eksponen. Fungsi eksponen yang akan dibahas terkait dengan fungsi pertumbuhan eksponen dan fungsi peluruhan eksponen. Eksplorasi yang terkait dengan kedua fungsi tersebut juga diberikan agar siswa dapat membangun pemahamannya mengenai kedua fungsi tersebut.

Pada subbab selanjutnya siswa akan melakukan eksplorasi yang terkait dengan logaritma. Kegiatan akan dilanjutkan untuk memahami sifat-sifat logaritma. Hal yang juga cukup penting untuk dipahami oleh siswa adalah melihat hubungan antara eksponen dan logaritma. Siswa diharapkan dapat memahami bagaimana permasalahan yang dapat diselesaikan dengan eksponen atau logaritma. kedua konsep ini dalam menyelesaikan masalah-masalah seperti di atas? Dan pada konteks apa lagi kedua konsep tersebut dapat digunakan? Semua akan kalian pelajari pada bab ini.

Skema Pembelajaran

Subbab	Waktu (JP)*	Tujuan	Pokok Materi	Kosakata	Bentuk Metode dan Aktivitas	Sumber Utama	Sumber Lain
A. Eksponen	8	1. Mengidentifikasi sifat-sifat eksponen. 2. Mengidentifikasi bentuk akar. 3. Mengidentifikasi fungsi eksponen. 4. Menyelesaikan permasalahan sehari-hari yang berkaitan dengan fungsi eksponen.	• Bentuk eksponen • Bentuk akar • Fungsi eksponen	• Eksponen • Akar • Fungsi • Pertumbuhan eksponen • Peluruhan eksponen	Eksplorasi, diskusi, pemaparan, latihan, pemanfaatan teknologi (opsional)	Buku Siswa	
B. Logaritma	4	1. Mengidentifikasi sifat-sifat logaritma 2. Menyelesaikan permasalahan sehari-hari yang berkaitan dengan logaritma.	• Logaritma	• Logaritma	Eksplorasi, diskusi, pemaparan, latihan, pemanfaatan teknologi (opsional)	Buku Siswa	

Catatan:

* Waktu merupakan saran rentang jam pelajaran. Guru dapat menyesuaikan dengan kondisi aktual pembelajaran.

Panduan Pembelajaran

Pengalaman Belajar

Sebelum memasuki materi mengenai Eksponen dan Logaritma, guru diharapkan dapat menjelaskan pengamalan belajar yang akan didapat siswa setelah mempelajari bab ini.

Sarana & Prasarana Pembelajaran

- Meja belajar siswa di kelas
- Kertas grafik
- Aplikasi *GeoGebra* jika memungkinkan

Apersepsi

Perkenalkan bab ini dengan menanyakan siswa kapan konsep Eksponen dan Logaritma muncul di dalam kehidupan mereka sehari-hari. Setelah itu, sampaikan pertanyaan pemantik dan beri tahu siswa bahwa mereka akan memikirkan dan mencoba mendapatkan jawaban terhadap dua pertanyaan ini selama pembelajaran bab mengenai Eksponen dan Logaritma.

Gunakan bagian Ayo Mengingat Kembali mengenai perkalian berulang yang sudah dipelajari di SMP bahkan SD. Pertanyaan-pertanyaan berikut dapat digunakan untuk mengaktifkan prapengetahuan siswa:

Bagaimana kalian menuliskan bentuk $2\times2\times2\times2\times2\times2$ dengan lebih singkat?
Bagaimana bentuk sederhana dari perkalian $15\times15\times15\times15$?
Apakah ada bentuk lain dari 2^6?

Pemanasan

Mulai aktivitas pembelajaran dengan meminta siswa berdiskusi tentang situasi yang sedang terjadi saat ini terkait dengan penyebaran virus Covid-19. Kemudian minta siswa melakukan Eksplorasi 1.1. Siswa dapat melakukan eksplorasi sendiri-sendiri terlebih dahulu kemudian baru diskusi secara berpasangan atau dalam kelompok, atau langsung bekerja sama berpasangan atau di dalam kelompok.

Ayo Bereksplorasi

Eksplorasi 1.1

Sebelum membahas permasalahan pada Eksplorasi 1.1, siswa diminta untuk membentuk kelompok yang terdiri atas 4 orang kemudian sajikan permasalahan yang terdapat pada Eksplorasi 1 tentang penyebaran suatu virus di suatu wilayah A. Setelah mencoba langsung, siswa diarahkan untuk menjawab setiap pertanyaan.

1. Berikut ini tabel yang sudah dilengkapi.

Fase Penularan	1	2	3	4	5	6	7	8
Banyak orang yang tertular	2	4	8	16	32	64	128	256

Guru dapat menanyakan kepada siswa bagaimana siswa menemukan bilangan-bilangan tersebut. Bilangan-bilangan tersebut diperoleh karena setiap orang akan menulari dua orang lainnya pada fase selanjutnya.

3. Banyak orang yang tertular pada fase ke-10 adalah 1.024. Pola dari penularan tersebut adalah 2^n sehingga untuk mendapatkan banyaknya orang yang tertular pada fase ke-10 adalah $2^{10} = 1.024$. Siswa mungkin akan menjawab bahwa mereka mengalikan bilangan pada fase sebelumnya dengan 2 atau mengatakan bahwa mereka akan mengalikan 2 sebanyak 10 kali karena yang akan dicari adalah banyaknya orang yang tertular pada fase ke-10.
4. Jika banyak fase yang terjadi adalah n, banyak orang yang tertular virus tersebut direpresentasikan dalam bentuk 2^n.
5. Hubungan antara fase penularan dan banyaknya orang yang tertular virus tersebut adalah untuk mendapatkan banyak orang yang tertular pada fase ke-n, maka pola yang digunakan adalah 2^n di mana n adalah fase penularan.
6. Ayo Berpikir Kritis

Jika terdapat 250 orang pada wilayah tersebut maka fase penularannya adalah 7 fase. Pada setiap fase akan terdapat orang yang baru lagi yang akan tertular. Pada fase pertama terdapat 2 orang yang tertular. Karena di awal 1 orang membawa virus tersebut, maka sekarang banyak orang yang tertular adalah 3 orang. Memasuki fase yang kedua, terdapat 2^2 orang yang tertular atau sebanyak 4 orang. Dengan kata lain, sampai fase ke-2 sudah ada 1+2+4=7 orang yang tertular. Dengan melihat pola ini siswa dapat menentukan fase ke berapa sehingga 250 orang akan tertular. Jadi, diperoleh 1+2+4+8+16+32+62+128=254. Sehingga 250 orang akan tertular semua pada fase ke-7.

Miskonsepsi

miskonsepsi yang mungkin akan terjadi adalah siswa akan menjawab fase ke-8 karena melihat banyaknya orang yang tertular pada fase ke-8 adalah 256. Padahal yang akan dicari sebenarnya adalah jumlah kumulatif orang yang tertular virus tersebut, bukan banyaknya orang yang tertular pada fase tertentu.

Pada bagian Eksplorasi 1.1, biarkan siswa mencoba dan tidak dituntut pasti mendapatkan jawabannya. Tujuannya adalah supaya mereka mulai memikirkan bagaimana cara menggunakan tabel penularan virus untuk mulai memikirkan hubungan antara fase penularan dan banyaknya orang yang tertular kemudian melihat apakah ada pola istimewa dari hubungan tersebut.

A. Eksponen

1. Definisi Eksponen

Kaitkan hasil eksplorasi siswa dengan penjelasan konsep definisi eksponen. Minta siswa membandingkan kembali dengan hasil mereka pada eksplorasi dan diskusikan jika masih ada yang masih belum jelas atau membingungkan. Berikan beberapa contoh bentuk eksponen dan mintalah siswa untuk memberikan contoh eksponen berdasarkan definisi yang ada.

2. Sifat-Sifat Eksponen

Ayo Bereksplorasi

Eksplorasi 1.2: Sifat-Sifat Eksponen

Pada Eksplorasi 1.2 siswa diajak untuk menemukan sifat-sifat eksponen berikut ini.

1. $a^m \bullet a^n = a^{m+n}$
2. $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$
3. $(a^m)^n = a^{m \times n}$

Siswa diminta untuk memperhatikan Tabel 1.1 pada Buku Siswa dan mencoba menyelesaikan beberapa bentuk eksponen yang ada pada Eksplorasi 1.2 yang menggiring mereka untuk menemukan sifat-sifat tersebut. Berikut jawaban dari pertanyaan pada eksplorasi ini.

Jawaban Eksplorasi 1.2:

1. $2^2 \bullet 2^3 = 4 \times 8 = 32 = 2^5$
2. $2^5 \bullet 2^2 = 32 \times 4 = 128 = 2^7$
3. $2^3 \bullet 2^7 = 8 \times 128 = 1024 = 2^{10}$
4. $\frac{2^8}{2^6} = \frac{256}{64} = 4 = 2^2$
5. $\frac{2^{10}}{2^3} = \frac{1024}{8} = 128 = 2^7$
6. $\frac{2^6}{2^4} = \frac{64}{16} = 4 = 2^2$
7. $(2^3)^3 = (8)^3 = 512 = 2^9$
8. $(2^4)^2 = (16)^2 = 256 = 2^8$
9. $(2^2)^5 = (4)^5 = 1024 = 2^{19}$

Dari eksplorasi di atas dapat disimpulkan bahwa:

1. $a^m \bullet a^n = a^{m+n}$
2. $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$
3. $(a^m)^n = a^{m \times n}$

Mintalah siswa untuk memahami sifat-sifat eksponen yang disajikan pada buku. Ajak siswa untuk mengamati syarat yang ada pada masing-masing sifat tersebut. Misalnya pada Sifat 1 mengapa nilai $a \neq 0$ dan seterusnya. Hal ini dapat menjadi diskusi yang menarik untuk dibahas dengan siswa. Setelah itu, lanjutkan kegiatan siswa untuk membuktikan sifat-sifat eksponen yang lainnya pada kegiatan Ayo Berpikir Kreatif.

Ayo Berpikir Kreatif

Bukti Sifat 4

$(ab)^m = a^m \times b^m$, dengan $a, b \neq 0,\ dan\ m\ bilangan\ bulat$

Alternatif 1

$$(ab)^m = \underbrace{ab \times ab \times ab \times \ldots \times ab}_{m \text{ faktor}}$$

$$(ab)^m = \underbrace{a \times a \times a \times \ldots \times a}_{m \text{ faktor}} \times \underbrace{b \times b \times b \times \ldots \times b}_{m \text{ faktor}}$$

$$(ab)^m = a^m \times b^m$$

Alternatif 2

Siswa dapat mengambil sebarang bilangan bulat m, a dan b. Lalu melakukan hal yang sama dengan proses yang ada pada Eksplorasi 1.

Diferensiasi

Untuk siswa yang mengalami kesulitan, guru dapat mengarahkan siswa untuk memulai pembuktian seperti yang ada pada Alternatif 2. Baru kemudian arahkan siswa untuk membuktikan secara formal seperti pada Alternatif 1.

Bukti Sifat 5

$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$, dengan $b \neq 0,\ dan\ m\ bilangan\ bulat$

Alternatif 1

$$\left(\tfrac{a}{b}\right)^m = \underbrace{\frac{a}{b} \times \frac{a}{b} \times \frac{a}{b} \times \cdots \times \frac{a}{b}}_{m\ faktor}$$

$$\left(\tfrac{a}{b}\right)^m = \frac{\underbrace{a \times a \times a \times \cdots \times a}_{m\ faktor}}{\underbrace{b \times b \times b \times \cdots \times b}_{m\ faktor}} \longrightarrow \left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$$

Alternatif 2

Siswa bisa mengambil sebarang bilangan bulat m, a dan b. Lalu melakukan hal yang sama dengan proses yang ada pada Eksplorasi 1.

Diferensiasi

Untuk siswa yang mengalami kesulitan, guru dapat mengarahkan siswa untuk memulai pembuktian seperti yang ada pada Alternatif 2. Baru kemudian arahkan siswa untuk membuktikan secara formal seperti pada Alternatif 1.

Kunci Jawaban Latihan 1.1

1. Sifat 6:

   $\left(a^{\frac{m}{n}}\right)\left(a^{\frac{p}{n}}\right) = (a)^{\frac{m+p}{n}}$ dengan $a>0, \frac{m}{n}$ dan $\frac{p}{n}$ $bilangan\ rasional\ dengan$ $n \neq 0$

   Bukti:
   Dengan menggunakan Sifat 1 maka berlaku

   $$\left(a^{\frac{m}{n}}\right)\left(a^{\frac{p}{n}}\right) = (a)^{\frac{m}{n}+\frac{p}{n}}$$

   $$\left(a^{\frac{m}{n}}\right)\left(a^{\frac{p}{n}}\right) = (a)^{\frac{m+p}{n}}$$

   Sifat 7:

   $\left(a^{\frac{m}{n}}\right)\left(a^{\frac{p}{q}}\right) = (a)^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}}, a>0\ , \frac{m}{n}, \frac{p}{q}$ $bilangan\ rasional\ dengan\ n,\ q \neq 0$

   Bukti:
   Dengan menggunakan Sifat 1 maka berlaku

   $$\left(a^{\frac{m}{n}}\right)\left(a^{\frac{p}{q}}\right) = (a)^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}}$$

2. Menentukan nilai p
   a. $\left(3^4\right)^2 = 3^8$
   b. $b^4 \cdot b^5 = b^9$
   c. $(3\pi)^3 = 27\pi^3$

3. Menyederhanakan

a. $$\begin{aligned}\left(\frac{2^4 \times 3^6}{2^3 \times 3^2}\right)^3 &= \left(2^{4-3} \times 3^{6-2}\right)^3 \\ &= \left(2^1 \times 3^4\right)^3 \\ &= 2^{1.3} \times 3^{4.3} \\ &= 2^3 \times 3^{12}\end{aligned}$$

b. $$\begin{aligned}\left(3u^3\nu^5\right)\left(9u^4\nu\right) &= 3.9.u^{3+4}\nu^{5+1} \\ &= 3^1.3^2.u^{3+4}\nu^{5+1} \\ &= 3^{1+2}.u^{3+4}\nu^{5+1} \\ &= 3^3.u^7\nu^6\end{aligned}$$

c. $$\begin{aligned}\left(\frac{n^{-1}r^4}{5n^{-6}r^{-4}}\right)^2 &= \left(\frac{n^{-1-(-6)}r^{4-(-4)}}{5}\right)^2 \\ &= \left(\frac{n^{-1+6}r^{4+4}}{5}\right)^2 \\ &= \left(\frac{n^5r^8}{5}\right)^2 \\ &= \frac{n^{10}r^{16}}{25}\end{aligned}$$

3. Fungsi Eksponen

Ayo Bereksplorasi

Dalam mempelajari fungsi eksponen, kegiatan diawali dengan mengajak siswa melakukan Eksplorasi 1.3

Eksplorasi 1.3: Fungsi Eksponen

Pada bagian ini siswa diminta untuk menyelesaikan permasalahan yang terkait dengan pengenalan fungsi eksponensial. Masalah yang disajikan adalah mengenai penularan virus. Siswa selanjutnya diminta untuk menjawab setiap pertanyaan yang diberikan

1. Untuk menentukan banyaknya orang yang tertular pada fase selanjutnya, ajak siswa untuk mendata banyak orang yang tertular pada setiap fase, salah satunya dengan bantuan tabel.

   Siswa boleh menggunakan cara yang lainnya juga, misalnya dengan mendata tanpa membuat tabel.

Fase Penularan	1	2	3	4	5	6	7	8
Banyak orang yang tertular	3	9	27	81	243	729	2.187	6.561

Dari data tersebut tampak bahwa banyak orang yang tertular virus pada setiap fasenya membentuk sebuah pola. Misalkan N adalah banyaknya orang yang tertular virus pada setiap fasenya, karena $N = 3^n$.

Siswa cukup menentukan banyak orang yang tertular pada beberapa fase saja dan melihat apa ada hubungan atau pola yang muncul.

2. Banyaknya orang yang tertular pada fase ke-20 adalah $N = 3^{20} = 3.486.784.401$. Siswa bisa mencari hasil penghitungan tersebut dengan menggunakan kalkulator.
3. Dari grafik tersebut diperoleh bahwa yang merepresentasikan peningkatan jumlah orang yang tertular virus tersebut jika proses penularan terjadi terus-menerus adalah grafik nomor III. Jika diperhatikan peningkatan kasus pada setiap fasenya (tabel pada bagian a), peningkatan jumlah orang yang tertular virus tersebut cukup signifikan pertambahannya sehingga grafik III paling tepat menggambarkan kondisi tersebut.

   Guru dapat menanyakan kepada siswa apa yang digambarkan pada grafik I dan II.
4. Fungsi yang tepat menggambarkan penularan virus tersebut adalah fungsi eksponen. Ini yang akan dipelajari oleh siswa pada bagian ini.

Setelah mengerjakan Eksplorasi 1.3, guru kemudian mengajak siswa untuk mendiskusikan permasalahan tersebut. Apakah ada hubungan yang menarik antara fase dan banyaknya orang yang tertular pada setiap fasenya. Eksplorasi 1.1 akan membantu siswa untuk memahami permasalahan ini.

Diskusi dilanjutkan dengan pembahasan tentang fungsi eksponensial. Siswa diperkenalkan dengan definisi fungsi eksponensial. Pada bagian ini guru dapat menambahkan eksplorasi misalnya dengan menunjukkan beberapa bentuk grafik fungsi eksponensial dengan menggunakan aplikasi misalnya *GeoGebra* atau *Desmos*.

Ayo Berpikir Kreatif

Berdasarkan definisi fungsi eksponen,

1. Jika $a = 1$, maka $f(x) = n \times 1^x = n$, maka fungsi tidak lagi menjadi fungsi

eksponensial melainkan fungsi konstan $f(x) = n$, dengan n adalah bilangan real. Hal ini terjadi karena jika $a = 1$, maka 1 dipangkatkan berapa pun akan tetap bernilai 1, sehingga fungsi akan berubah menjadi fungsi konstan.

2. Jika $a = 0$, maka fungsi akan berubah menjadi $f(x) = 0$ yang akan memotong sumbu x di $y = 0$ dan bukan lagi menjadi fungsi eksponen melainkan fungsi linear.

Diferensiasi

Untuk siswa yang sulit memahami hal tersebut, guru bisa memberikan ilustrasi dengan menggambarkan grafik fungsi yang baru dengan $a = 1$ dan $a = 0$.

Guru melanjutkan penjelasan tentang fungsi pertumbuhan eksponensial dan peluruhan eksponensial. Guru kembali mengajak siswa untuk memeriksa Eksplorasi 1.3 dan menyampaikan bahwa permasalahan tersebut adalah salah satu permasalahan yang menunjukkan fungsi pertumbuhan eksponensial.

Ayo Berpikir Kreatif

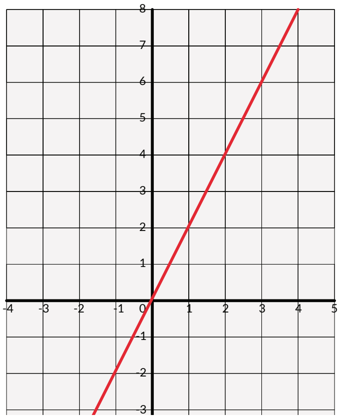
$f(x) = 2x$

$f(x) = 2^x$

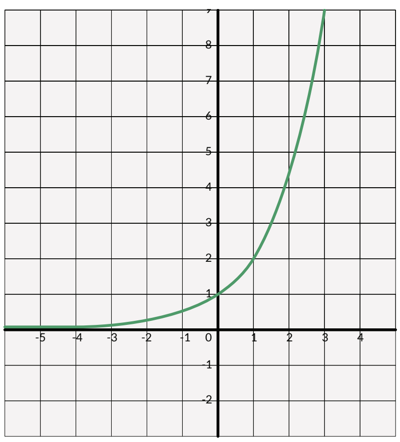
$f(x) = x^2$

1. Gambarlah ketiga grafik fungsi tersebut.

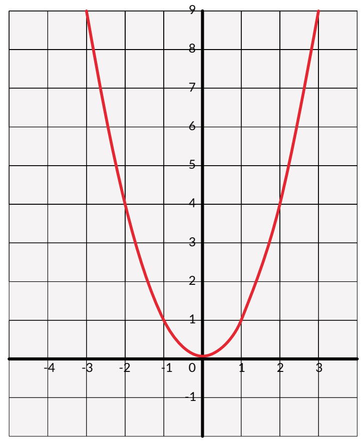
   $f(x) = 2x$



$f(x) = 2^x$



$f(x) = x^2$



2. Grafik fungsi $f(x) = 2x$ merupakan grafik fungsi linear, grafik fungsi $f(x) = 2^x$ merupakan grafik fungsi eksponensial, sedangkan grafik fungsi $f(x) = x^2$ merupakan grafik fungsi kuadrat. Perubahan nilai pada ketiga grafik tersebut juga tidaklah sama.

3. **Ayo Berdiskusi**

   Dari ketiga grafik fungsi tersebut, yang paling cepat peningkatan atau pertumbuhannya adalah $f(x) = 2^x$. Dapat diperhatikan bahwa setiap perubahan nilai x memberikan perubahan nilai $f(x)$ yang signifikan dibandingkan dengan grafik fungsi linear dan kuadrat.

a. Pertumbuhan Eksponensial

Guru kemudian melanjutkan penjelasan mengenai pertumbuhan eksponensial dengan merujuk pada kurva $f(x) = 3^x$ pada Gambar 3. Penjelasan kemudian dilanjutkan dengan penjelasan mengenai definisi fungsi pertumbuhan eksponen. Selanjutnya guru menjabarkan contoh yang disajikan pada **Contoh 3** dan **Contoh 4** serta dapat memberikan contoh lain dari pertumbuhan eksponensial dari sumber yang lainnya.

Ayo Berpikir Kritis

- Jika banyak bakteri di awal adalah 200, maka pertumbuhan bakterinya dimodelkan dengan fungsi $f(x) = 50.(2^x)$.

- Jika banyak bakteri di awal adalah 100, maka pertumbuhan bakterinya dimodelkan dengan fungsi $f(x) = 100.(2^x)$.
- Jika banyak bakteri di awal adalah 50, maka pertumbuhan bakterinya dimodelkan dengan fungsi $f(x) = 200.(2^x)$.

Ayo Berdiskusi

Minta siswa untuk mendiskusikan jawaban mereka pada kegiatan Ayo Berpikir Kritis di atas. Jika ada jawaban yang berbeda, guru memfasilitasi siswa untuk mendiskusikan jawabannya sampai memperoleh jawaban yang tepat.

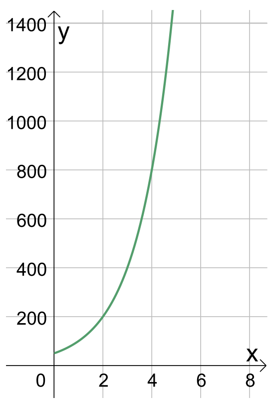
Kunci Jawaban Latihan 1.2

1. Jumlah bakteri *E. coli* di awal adalah 50 bakteri dan membelah menjadi dua setiap 15 menit.

   a. Tabel Pertumbuhan Bakteri

Fase Pertumbuhan (15 menit)	0	1	2	3	4	5
Banyak bakteri	50	100	200	400	800	1.600

   Gambar grafik fungsinya adalah sebagai berikut:



   b. Fungsi tersebut digambarkan dalam fungsi $f(x) = 50.(2^x)$

   c. Setelah 3 jam pertama berarti fase pertumbuhan bakteri berada pada fase ke-12 (bakteri membelah setiap 15 menit).
   Banyak bakteri adalah:

$f(x) = 50.(2^{12})$
$f(x) = 50 \times 4.096$
$f(x) = 204.800$

Setelah 4 jam pertama berarti fase pertumbuhan bakteri berada pada fase ke-16 (bakteri membelah setiap 15 menit).
Banyak bakteri adalah:
$f(x) = 50.(2^{16})$
$f(x) = 50 \times 65.536$
$f(x) = 3.276.800$

2. Banyak kasus HIV-AIDS pada tahun 2015 adalah 36.000.000 jiwa.
Peningkatan tahunan adalah 2%
Tabel Peningkatan Kasus HIV-AIDS

Tahun ke-n	Banyak kasus
0	36.000.000
1	36.000.000 + 2% × 36.000.000 = 36.720.000
2	36.720.000 + 2% × 36.720.000 = 37.454.400
3	37.454.400 + 2% × 37.454.400 = 36.720.000
...	...

Jika dilanjutkan penghitungan tersebut, permasalahan tersebut berbentuk fungsi eksponen. Model matematika yang tepat untuk menentukan banyak kasus HIV AIDS dengan pertumbuhan 2% pada tahun ke- x adalah
$f(x) = 36.000.000 \times (1+0{,}02)^{x}$
Misalkan kasus awal dihitung dari tahun 2015, maka kasus pada tahun 2020 dihitung sebagai kasus ke-5.
Banyak kasus yang terjadi pada tahun 2020 adalah
$f(5) = 36.000.000 \times (1+0{,}02)^{5}$
$f(5) = 36.000.000 \times 1{,}104080803$
$f(5) = 39.746.908$

3. **Ayo Berpikir Kreatif**

Contoh penerapan pertumbuhan eksponensial yang lainnya misalnya pada konteks bunga majemuk, pertumbuhan suatu populasi tertentu, dan sebagainya. Konfirmasi jawaban siswa seperti apa pertumbuhan eksponensial yang terjadi pada contoh yang mereka kemukakan.

b. Peluruhan Eksponensial

Kegiatan dilanjutkan dengan menjelaskan tentang fungsi peluruhan eksponensial. Guru menjelaskan dan menggambarkan bagaimana fungsi peluruhan eksponen terjadi dan mengajak siswa untuk mendiskusikan perbedaan fungsi pertumbuhan eksponen dan peluruhan eksponen. Kegiatan kemudian dilanjutkan dengan memberikan Contoh 5 kepada siswa.

Pada Contoh 5, ajak siswa untuk mendiskusikan mengapa fungsi yang digunakan untuk permasalahan tersebut adalah $f(x) = 50\left(\frac{1}{2}\right)^x$. Jika siswa mengalami kesulitan, maka guru dapat membimbing siswa kembali untuk melihat peluruhan dosis obat pada setiap fasenya.

Ayo Berpikir Kreatif

Waktu yang dibutuhkan sehingga dosis obat tersebut masih ada di dalam tubuh pasien kurang dari 0,1 mikrogram. Siswa dapat memprediksi dengan mencoba-coba hingga diperoleh dosis kurang dari 0,1 miligram seperti berikut ini.

$$f(0) = 50$$
$$f(1) = \tfrac{1}{2} \times 50 = 25$$
$$f(2) = \tfrac{1}{2} \times 25 = 12,5$$
$$f(3) = \tfrac{1}{2} \times 12,5 = 6,25$$
$$f(4) = \tfrac{1}{2} \times 6,25 = 3,125$$
$$f(5) = \tfrac{1}{2} \times 3,125 = 1,5625$$
$$f(6) = \tfrac{1}{2} \times 1,5625 = 0,78125$$
$$f(7) = \tfrac{1}{2} \times 0,78125 = 0,391$$
$$f(8) = \tfrac{1}{2} \times 0,391 = 0,195$$
$$f(9) = \tfrac{1}{2} \times 0,195 = 0,098$$

Dengan memprediksi seperti cara di atas maka diperoleh bahwa setelah 9 jam maka dosis obat sudah kurang dari 0,1 mg.

Sebagai alternatif, fungsi logaritma sebenarnya dapat digunakan untuk memudahkan penghitungan, tetapi konsep tersebut baru akan diajarkan pada pertemuan selanjutnya.

Diferensiasi

Bagi siswa yang kecepatan belajarnya tinggi (advanced), mereka diminta mengerjakan bagian **Mandiri** dan/atau bagian **Bernalar** tanpa bantuan, dan memikirkan pertanyaan-pertanyaan yang dapat diajukan. Pada saat yang sama, guru dapat mendampingi siswa yang mengalami kesulitan.

Kunci Jawaban Latihan 1.3

1. Zat yang disuntikkan ke dalam tubuh pasien adalah 200 mg.
   Zat yang dikeluarkan setiap jamnya adalah 50%.
   Banyak zat yang masih tersisa di dalam tubuh pasien adalah:
   $$f(x) = 200\left(\frac{1}{2}\right)^x$$
   Setelah 5 jam, maka banyak zat yang tersisa di dalam tubuh pasien adalah:
   $$f(5) = 200\left(\frac{1}{2}\right)^5$$
   $$f(5) = 200 \times 0,03125$$
   $$f(5) = 6,25$$
   Sehingga banyaknya zat yang masih tersisa di dalam tubuh pasien adalah 6,25 mg.

2. Massa radiokatif adalah 0,3 kg pada jam 10.00 pagi.
   Tingkat peluruhan 15% per jam.
   Jadi massa radioaktif yang tersisa adalah 100%-15%=85%
   Massa radiokatif yang tersisa dituliskan dalam fungsi $f(x) = 0{,}3(0{,}85)^x$
   Setelah 5 jam, maka banyak zat yang dikeluarkan dari dalam tubuh pasien adalah:
   $$f(5) = 0{,}3(0{,}85)^5$$
   $$f(5) = 0{,}3 \times 0{,}7225$$
   $$f(5) = 0{,}21675 \text{ kg}$$
   $$f(5) = 216{,}75 \text{ gram.}$$

Sehingga banyaknya zat yang masih tersisa di dalam tubuh pasien adalah 300-216,75=83,25 gram.

3. Ketinggian awal bola basket adalah 3 m.
   Tinggi lambungan bola adalah $\frac{3}{5}$ dari tinggi sebelumnya.

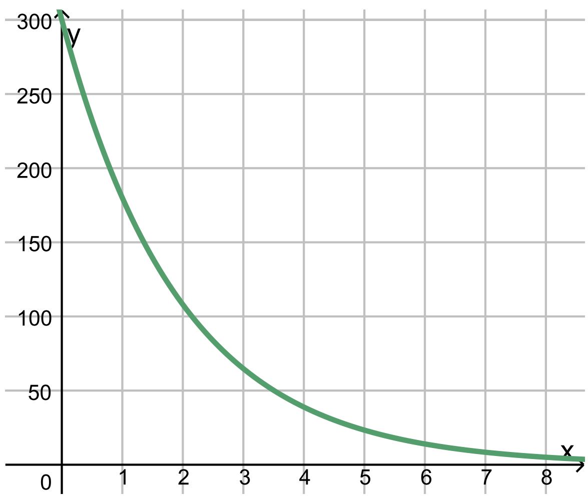
   a. Untuk memudahkan, buatlah tabel yang membantu menentukan tinggi lambungan bola pada fase selanjutnya. Misalnya satuan tinggi bola diubah ke dalam cm menjadi 300 cm.

Fase lambungan	0	1	2	3	4	5
Tinggi bola (cm)	300	180	108	64,8	38,88	23,328

Berdasarkan data di atas, maka fungsi yang tepat untuk menggambarkan perubahan ketinggian lambungan bola adalah

$$f(x) = 300\left(\frac{3}{5}\right)^x$$

Grafik fungsi perubahan ketinggian lambungan bola hingga akhirnya menyentuh tanah adalah sebagai berikut.



Bimbing siswa untuk menggambarkan grafik fungsi tersebut dengan menggunakan aplikasi seperti *GeoGebra* atau jika memang tidak memungkinkan siswa dapat menggambarkan secara manual di selembar kertas.

c. Untuk menentukan pada lambungan ke berapa bola akan berhenti melambung, siswa dapat menguji coba setiap fase lambungan hingga menentukan bahwa pada lambungan tersebut bola benar-benar berhenti melambung.

Hasil yang diperoleh adalah sebagai berikut.

Fase	Tinggi
0	300
1	180
2	108
3	64,8
4	38,88
5	23,328
6	13,9968
7	8,39808
8	5,038848
9	3,023309
10	1,813985
11	1,088391
12	0,653035
13	0,391821
14	0,235092
15	0,141055

Jika diperhatikan, pada lambungan ke-12, ketinggian bola sudah 0,65 cm atau dengan kata lain bola berhenti melambung. Akan tetapi, jika melihat data tersebut pada lambungan ke-10 dengan ketinggian 1,8 cm, kemungkinan bola juga sudah berhenti melambung mengingat massa bola yang tidak memungkinkan untuk melambung kembali.

Ajak siswa untuk mendiskusikan hal tersebut. Kapan bola benar-benar berhenti melambung. Untuk memudahkan siswa mencari tinggi bola pada setiap fase lambungan, guru dapat mengarahkan siswa untuk menggunakan *Microsoft Excel.*

Penguatan Karakter

Ajak siswa untuk merenungkan penjabaran tentang hubungan antara sedekah dan banyaknya rezeki yang diberikan Tuhan yang digambarkan dalam bentuk fungsi eksponen. Apakah benar kondisi tersebut dapat digambarkan dalam bentuk eksponensial? Ajak siswa untuk mencari contoh makna lain dari pertumbuhan maupun peluruhan eksponen yang dapat mereka temui dalam kehidupan sehari-hari.

4. Bentuk Akar

a. Hubungan Bilangan Pangkat dan Akar

Pada bagian ini guru menjelaskan hubungan antara bilangan pangkat dan akar. Merujuk pada Contoh 5 sebelumnya, guru menjelaskan bagaimana hubungan antara akar dan bilangan pangkat. Penjelasan kemudian dilanjutkan dengan memberikan bentuk umum dari bentuk akar. Siswa juga diminta untuk mengingat kembali sifat-sifat eksponen yang sudah dipelajari sebelumnya.

Ayo Berpikir Kritis

Bentuk $\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$ tidak benar karena misalkan kalian mengambil nilai $a = 4$ dan $b = 9$, maka diperoleh:

$\sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$

$\sqrt{16} + \sqrt{9} = 4 + 3 = 7$

Siswa boleh mengambil bilangan lainnya dan membuktikan bahwa hal tersebut tidak berlaku

b. Merasionalkan Bentuk Akar

Pada bagian ini guru menjelaskan bagaimana merasionalkan bentuk akar dari beberapa bentuk akar yang perlu dirasionalkan. Guru mengajak siswa mendiskusikan mengapa bentuk akar tersebut perlu untuk dirasionalkan.

Diferensiasi

Untuk siswa yang mengalami kesulitan, guru dapat memberikan contoh yang lebih konkret.

Ayo Berpikir Kreatif

Coba rasionalkan bentuk-bentuk ini:

$$\frac{c}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}, \frac{c}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}, \frac{c}{a+\sqrt{b}}, \text{ dan } \frac{c}{a-\sqrt{b}}$$

b. $$\begin{aligned}\frac{c}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} &= \frac{c}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} \times \frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}\\ &= \frac{c\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)}{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)}\\ &= \frac{c\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)}{(\sqrt{a})^2-\left(\sqrt{b}\right)^2}\\ &= \frac{c\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)}{a-b}\end{aligned}$$

c. $$\begin{aligned}\frac{c}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} &= \frac{c}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} \times \frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\\ &= \frac{c\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)}{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)}\\ &= \frac{c\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)}{(\sqrt{a})^2-\left(\sqrt{b}\right)^2}\\ &= \frac{c\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)}{a-b}\end{aligned}$$

d. $$\frac{c}{a+\sqrt{b}} = \frac{c}{a+\sqrt{b}} \times \frac{a-\sqrt{b}}{a-\sqrt{b}}$$
$$= \frac{c\left(a-\sqrt{b}\right)}{\left(a+\sqrt{b}\right)\left(a-\sqrt{b}\right)}$$
$$= \frac{c\left(a-\sqrt{b}\right)}{(a)^2-\left(\sqrt{b}\right)^2}$$
$$= \frac{c\left(a-\sqrt{b}\right)}{a^2-b}$$

e. $$\frac{c}{a-\sqrt{b}} = \frac{c}{a-\sqrt{b}} \times \frac{a+\sqrt{b}}{a+\sqrt{b}}$$
$$= \frac{c\left(a+\sqrt{b}\right)}{\left(a-\sqrt{b}\right)\left(a+\sqrt{b}\right)}$$
$$= \frac{c\left(a+\sqrt{b}\right)}{(a)^2-\left(\sqrt{b}\right)^2}$$
$$= \frac{c\left(a+\sqrt{b}\right)}{a^2-b}$$

Ayo Berdiskusi

Minta siswa untuk saling membandingkan dan mendiskusikan cara yang mereka gunakan masing-masing.

Kunci Jawaban Latihan 1.4

1. Sederhanakan bentuk akar berikut ini.

   a. $$\left(\frac{8x^5y^{-4}}{16y^{-\frac{1}{4}}}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{\left(2^3\right)^{\frac{1}{2}}\left(x^5\right)^{\frac{1}{2}}\left(y^{-4}\right)^{\frac{1}{2}}}{\left(2^4\right)^{\frac{1}{2}}\left(y^{-\frac{1}{4}}\right)^{\frac{1}{2}}}$$
$$= \frac{(2)^{\frac{3}{2}}(x)^{\frac{5}{2}}(y)^{-2}}{2^2(y)^{-\frac{1}{8}}}$$
$$= (2)^{\frac{3}{2}-2}(x)^{\frac{5}{2}}(y)^{-2+\frac{1}{8}}$$
$$= \frac{(x)^{\frac{5}{2}}}{(2)^{\frac{1}{2}}(y)^{\frac{15}{8}}}$$

b. $\left(5\sqrt{x^5}\right)\left(3\sqrt[3]{x}\right) = \left(5x^{\frac{5}{2}}\right)\left(3x^{\frac{1}{3}}\right)$

$$= 15x^{\frac{5}{2}+\frac{1}{3}}$$

$$= 15x^{\frac{15+2}{6}}$$

$$= 15x^{\frac{17}{6}}$$

$$= 15x^2\sqrt[6]{x^5x}$$

c. $\left(\dfrac{p^5q^{-10}}{p^5q^{-4}}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\dfrac{p^{\frac{1}{4}}q^{-\frac{1}{2}}}{p^{-\frac{1}{2}}q^{-\frac{1}{2}}}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\dfrac{p^{\left(5\cdot\frac{1}{2}\right)}q^{-10\cdot\frac{1}{2}}}{p^{\left(5\cdot\frac{1}{2}\right)}q^{-4\cdot\frac{1}{2}}}\right)\left(\dfrac{p^{\left(\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}\right)}q^{\left(-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\right)}}{p^{\left(-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\right)}q^{\left(-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\right)}}\right)$

$$= \left(\frac{p^{\frac{5}{2}}q^{-5}}{p^{\frac{5}{2}}q^{-2}}\right)\left(\frac{p^{\frac{1}{8}}q^{-\frac{1}{4}}}{p^{-\frac{1}{4}}q^{-\frac{1}{4}}}\right)$$

$$= \left(p^{\frac{5}{2}-\frac{5}{2}}q^{-5-(-2)}\right)\left(p^{\frac{1}{8}-\left(-\frac{1}{4}\right)}q^{-\frac{1}{4}-\left(-\frac{1}{4}\right)}\right)$$

$$= \left(p^0q^{-3}\right)\left(p^{\frac{1+2}{8}}q^0\right)$$

$$= \left(1\cdot q^{-3}\right)\left(p^{\frac{3}{8}}\cdot 1\right)$$

$$= \frac{p^{\frac{3}{8}}}{q^3}$$

$$= \frac{\sqrt[8]{p^3}}{q^3}$$

2. Rasionalkan bentuk berikut ini.

a. $\dfrac{2}{\sqrt[4]{b^3}} = \dfrac{2}{\sqrt[4]{b^3}} \times \dfrac{\sqrt[4]{b}}{\sqrt[4]{b}}$

$$= \frac{2\sqrt[4]{b}}{\sqrt[4]{b^4}}$$

$$= \frac{2\sqrt[4]{b}}{b}$$

b. $\dfrac{2}{\sqrt{3}+\sqrt{5}} = \dfrac{2}{\sqrt{3}+\sqrt{5}} \times \dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{5}}{\sqrt{3}-\sqrt{5}}$

$$= \frac{2\left(\sqrt{3}-\sqrt{5}\right)}{3-5}$$

$$= \frac{2\left(\sqrt{3}-\sqrt{5}\right)}{-2}$$

$$= -\left(\sqrt{3}-\sqrt{5}\right)$$

$$= \sqrt{5}-\sqrt{3}$$

c. $$\frac{m}{\sqrt{m}+n} = \frac{m}{\sqrt{m}+n} \times \frac{\sqrt{m}-n}{\sqrt{m}-n}$$
$$= \frac{m\left(\sqrt{m}-n\right)}{m-n^2}$$

Ayo Berefleksi

Sebagai penutup dari pembelajaran subbab ini, ajak siswa untuk merefleksikan apa yang sudah mereka pelajari melalui dua pertanyaan:

- Apa itu bilangan eksponen?
  Sampel jawaban: bilangan eksponen adalah bilangan yang berbentuk a^n menyatakan hasil kali bilangan a sebanyak n faktor. a adalah bilangan real dan n adalah bilangan bulat positif.
- Seperti apa bentuk fungsi eksponen?
  Sampel jawaban: Sebuah fungsi eksponen dinyatakan dengan $f(x) = n \times \mathrm{a}^x$, di mana a adalah bilangan pokok, $\mathrm{a} > 0$, $a \neq 1$, n adalah bilangan real tak nol dan x adalah sebarang bilangan real.
- Apa yang membedakan fungsi pertumbuhan eksponen dan peluruhan eksponen?
- Sampel jawaban: fungsi pertumbuhan eksponen menunjukkan tingkat pertumbuhan yang berbanding lurus dengan besarnya nilai kuantitas. Penambahan jumlah kuantitasnya bisa dikatakan signifikan, sedangkan peluruhan eksponensial menggambarkan penurunan secara konsisten pada periode waktu tertentu.

Aktivitas ini dapat dilakukan secara bersamaan dengan melakukan *Think-Pair-Share*, yaitu meminta masing-masing siswa memikirkan jawaban pertanyaan refleksi tersebut kemudian berpasangan saling membagikan jawaban, memodifikasi jawaban sesuai hasil berbagi dengan pasangan, dan kemudian menyampaikan di kelas. Guru dapat melakukan penilaian formatif berdasarkan jawaban dari siswa sehingga dapat menekankan kembali konsep utama sesuai dengan tujuan pembelajaran, atau memperbaiki miskonsepsi yang masih dimiliki oleh siswa.

Aktivitas ini juga dapat dilakukan secara mandiri oleh masing-masing siswa dengan menuliskan dalam jurnal refleksi mereka jika waktu yang tersedia singkat dan tidak memungkinkan untuk mengadakan diskusi bersama. Selanjutnya guru dapat mengumpulkan hasil refleksi dan memberikan umpan balik terhadap pemahaman masing-masing siswa.

Ayo Berpikir Kreatif

Banyak sekali contoh penerapan fungsi eksponen dalam kehidupan sehari-hari. Beberapa di antaranya adalah penggunaan dosis obat, penghitungan bunga majemuk, pertumbuhan, peluruhan zat radioaktif, dan sebagainya.

Ajak siswa untuk mencari tahu pada buku atau situs internet yang menyajikan contoh-contoh fungsi eksponensial dan mendiskusikan temuan mereka. Yang lebih penting adalah mereka dapat menjelaskan seperti apa fungsi eksponensial disajikan pada permasalahan atau konteks yang mereka temukan. Diskusi dapat dilakukan secara berkelompok atau diskusi besar di dalam kelas.

B. Logaritma

Apersepsi

Mengingatkan siswa apa yang sudah dipelajari pada pertemuan sebelumnya mengenai bentuk eksponen dan sifat-sifat eksponen. Jika guru meminta siswa menuliskan refleksi di jurnal, maka dapat menekankan kembali hal-hal yang siswa masih belum terlalu jelas sebagaimana tecermin dalam refleksi mereka.

Pemanasan

Tekankan pertanyaan pemantik "*Bagaimana bentuk logaritma dan permasalahan sehari-hari seperti apa yang dapat diselesaikan dengan menggunakan logaritma*" yang akan dijawab melalui pembelajaran subbab ini.

Ayo Bereksplorasi

Eksplorasi 1.4: Logaritma

Ajak siswa untuk mendiskusikan tentang permasalahan yang disajikan pada Eksplorasi 1.4. Permasalahan yang ada pada Eksplorasi 1.4 juga masih berhubungan dengan bentuk eksponen, tetapi untuk permasalahan kali ini yang akan dicari adalah waktu yang dibutuhkan sampai banyak bakteri mencapai jumlah tertentu. Berikan kesempatan kepada siswa terlebih dahulu untuk menyelesaikan Eksplorasi 1.4.

Di awal minta siswa untuk membuat tabel pertumbuhan koloni bakteri terlebih dahulu seperti yang sudah dilakukan pada eksplorasi-eksplorasi sebelumnya. Untuk menentukan waktu yang dibutuhkan oleh koloni bakteri hingga berjumlah 64.000 tentu masih mudah untuk siswa. Dengan bantuan tabel akan mudah untuk siswa menentukan bahwa 64.000 bakteri akan muncul setelah 5 jam.

Tabel 1.1 Pertumbuhan Koloni Bakteri

Waktu (x)	0	1	2	3	4	5	10
Banyak bakteri	2.000	4.000	8.000	16.000	32.000	64.000	128.000

Setelah siswa berhasil menentukan waktu yang dibutuhkan hingga terdapat 64.000 bakteri, diskusi dilanjutkan dengan menentukan waktu sehingga dihasilkan 100.000 bakteri. Diskusi ini menarik karena setelah siswa perhatikan pada tabel yang mereka buat, 100.000 tidak terdata. Ajak siswa untuk memperkirakan kira-kira di antara waktu yang mana mereka bisa menentukan waktu sampai dihasilkan 100.000 bakteri. Waktu yang dibutuhkan ternyata tidaklah bulat. Berikan kesempatan kepada siswa untuk memperkirakan waktu yang paling mendekati. Selain itu, bimbing siswa untuk memodelkan permasalahan tersebut dalam bentuk eksponensial.

Setelah siswa selesai memperkirakan waktu yang paling mendekati sehingga bisa dihasilkan 100.000 bakteri, guru kemudian menjelaskan bahwa ada konsep lain yang dapat membantu siswa untuk menentukan waktu tersebut yaitu dengan menggunakan konsep logaritma. Guru dapat menjabarkan dan menjelaskan kembali penjelasan yang sudah dipaparkan di Buku Siswa.

1. Definisi Logaritma

Guru kemudian melanjutkan untuk menjelaskan definisi Logaritma dan hubungannya dengan eksponen. Guru juga menjelaskan beberapa contoh tambahan dan meminta siswa untuk memberikan contoh bentuk eksponen selain yang sudah ada di buku dan mengubahnya ke dalam bentuk logaritma.

2. Sifat-Sifat Logaritma

Penjelasan kemudian dilanjutkan untuk memaparkan sifat-sifat yang berlaku pada logaritma. Diskusikan satu per satu sifat-sifat tersebut dan konfirmasi pemahaman siswa. Ajak dan bimbing siswa untuk membuktikan sifat-sifat logaritma tersebut.

Ayo Mencoba

Alternatif pembuktian lain dari ${}^{a}\log(b \times c) = {}^{a}\log b + {}^{a}\log c$

Bukti:

Misalkan
${}^{a}\log b = m$, maka $b = a^{m}$
${}^{a}\log c = n$, maka $c = a^{n}$

Dengan demikian,

$$\begin{aligned} {}^{a}\log(b \times c) &= {}^{a}\log\left(a^{m} \times a^{n}\right) \\ &= {}^{a}\log\left(a^{m+n}\right) \\ &= (m+n)\ {}^{a}\log a \\ &= {}^{a}\log b + {}^{a}\log c \end{aligned}$$

Ayo Berdiskusi

Pembuktian Sifat 5: ${}^{a}\log\left(\frac{b}{c}\right) = {}^{a}\log b - {}^{a}\log c$

Misalkan ${}^{a}\log\ b = m$ dan ${}^{a}\log\ c = n$.
Kalian dapat menuliskan bentuk eksponennya sebagai berikut:
$b = a^{m}$ dan $c = a^{n}$
Ingat kembali sifat eksponen $\frac{a^{m}}{a^{n}} = a^{m-n}$

$$\frac{a^{m}}{a^{n}} = a^{m-n}$$

$$\frac{b}{c} = a^{m-n}$$

${}^{a}\log\left(\frac{b}{c}\right) = m - n$ Definisi Logaritma

${}^{a}\log\left(\frac{b}{c}\right) = {}^{a}\log b - {}^{a}\log c$ Ingat kembali ${}^{a}\log\ b = m$ dan ${}^{a}\log\ c = n$.

Terbukti

Pembuktian Sifat 6: ${}^{a}\log\left(b^{n}\right) = n \cdot {}^{a}\log b$

$${}^{a}\log\left(b^{n}\right) = {}^{a}\log\left(\underbrace{b \times b \times b \times \ldots \times b}_{n\text{ faktor}}\right) \qquad \text{Ingat Definisi Eksponen}$$

$${}^{a}\log\left(b^{n}\right) = \underbrace{{}^{a}\log b + {}^{a}\log b + {}^{a}\log b + \ldots + {}^{a}\log b}_{n\text{ faktor}} \qquad \text{Ingat Sifat 4}$$

$${}^{a}\log\left(b^{n}\right) = n \cdot {}^{a}\log b$$

Terbukti

Pembuktian Sifat 7: ${}^{a}\log \mathrm{b} = \frac{{}^{m}\log b}{{}^{m}\log a} = \frac{1}{{}^{b}\log a}$

Berdasarkan Definisi Logaritma:
${}^{a}\log\ b = c$ jika dan hanya jika $b = a^{c}$
Terdapat sebarang bilangan pokok m sedemikian sehingga
${}^{m}\log b = {}^{m}\log a^{c}$
Berdasarkan sifat 6, maka

$${}^{m}\log b = c \cdot {}^{m}\log a$$

$$c = \frac{{}^{m}\log b}{{}^{m}\log a}$$

Substitusi nilai $c = {}^{a}\log b$, maka diperoleh ${}^{a}\log b = \frac{{}^{m}\log b}{{}^{m}\log a}$ Selanjutnya, karena m adalah bilangan sebarang, maka dapat dipenuhi $m = b$.
Substitusi nilai $m = b$, maka diperoleh,

$${}^{a}\log b = \frac{{}^{b}\log b}{{}^{b}\log a}$$

$${}^{a}\log b = \frac{1}{{}^{b}\log a} \qquad \text{Ingat Sifat 1}$$

Jadi terbukti ${}^{a}\log b = \frac{{}^{m}\log b}{{}^{m}\log a} = \frac{1}{{}^{b}\log a}$

Pembuktian Sifat 8: ${}^{a}\log b \times {}^{b}\log c = {}^{a}\log c$

Berdasarkan definisi,
${}^{a}\log b = m \leftrightarrow b = a^{m}$
${}^{b}\log c = n \leftrightarrow c = b^{n}$

Selanjutnya,

$$^a\log b \times {}^b\log c = {}^a\log b \times {}^b\log b^n$$
$$^a\log b \times {}^b\log c = {}^a\log b \times n \times {}^b\log b$$
$$^a\log b \times {}^b\log c = {}^a\log b \times n \times 1$$
$$^a\log b \times {}^b\log c = n \cdot {}^a\log b$$
$$^a\log b \times {}^b\log c = {}^a\log b^n$$
$$^a\log b \times {}^b\log c = {}^a\log c$$

Terbukti

Kunci Jawaban Latihan 1.5

1. Menentukan nilai logaritma
   a. $^9\log 81 = {}^9\log 9^2$
   $^9\log 81 = 2\ {}^9\log 9$
   $^9\log 81 = 2$
   b. $^2\log 64 - {}^2\log 16 = {}^2\log \dfrac{64}{16}$
   $^2\log 64 - {}^2\log 16 = {}^2\log 4$
   $^2\log 64 - {}^2\log 16 = 2$
   c. $^4\log 16^{10} = {}^4\log(4^2)^{10}$
   $^4\log 16^{10} = {}^4\log 4^{20}$
   $^4\log 16^{10} = 20$
2. $^5\log 4 = m,\ {}^4\log 3 = n$

$$\begin{aligned} {}^{12}\log 100 &= \frac{{}^4\log 100}{{}^4\log 12} \\ &= \frac{{}^4\log(4 \times 25)}{{}^4\log(4 \times 3)} \\ &= \frac{{}^4\log 4 + {}^4\log 25}{{}^4\log 4 + {}^4\log 3} \\ &= \frac{{}^4\log 4 + 2 \cdot {}^4\log 5}{{}^4\log 4 + {}^4\log 3} \\ &= \frac{1 + 2 \cdot \frac{1}{m}}{1 + n} \\ &= \frac{1 + \frac{2}{m}}{1 + n} \end{aligned}$$

3. Jumlah penduduk = 300.000 jiwa

   Pertumbuhan penduduk per tahun 6%.

   Fungsi yang tepat untuk menggambarkan pertumbuhan penduduk dalam x tahun adalah:

$$f(x) = 300.000(1 + 0,06)^x$$

   Untuk jumlah penduduk 1.000.000 jiwa:

$$\begin{aligned} 1.000.000 &= 300.000(1 + 0,06)^x \\ 1.000.000 &= 300.000(1,06)^x \\ \tfrac{1.000.000}{300.000} &= (1,06)^x \\ 3,33 &= (1,06)^x \\ x &= {}^{1,06}\log 3,33 \\ x &= 20,645 \end{aligned}$$

   Jadi penduduk akan mencapai 1.000.000 jiwa dalam waktu 20 atau 21 tahun.

4. Tabungan awal = Rp2.000.000,00

   Tabungan akhir = Rp6.500.000,00

   Bunga = 12%

   Fungsi yang tepat untuk menggambarkan tabungan Dini dalam x tahun adalah:

$$f(x) = 2.000.000(1 + 0,12)^x$$

   Untuk tabungan akhir sebesar Rp6.500.000,00:

$$\begin{aligned} 6.500.000 &= 2.000.000(1 + 0,12)^x \\ 6.500.000 &= 2.000.000(1,12)^x \\ \tfrac{6.500.000}{2.000.000} &= (1,12)^x \\ 3,25 &= (1,12)^x \\ x &= {}^{1,12}\log 3,25 \\ x &= 10,4 \end{aligned}$$

   Jadi, tabungan Dini akan mencapai Rp6.500.000,00 dalam waktu 10 tahun.

Kunci Jawaban Latihan 1.6

Soal Pemahaman

1. Selesaikanlah:

   a. $$\left(\frac{3a^{-2}b}{a^2b^5c^{-1}}\right)^{-3} = \frac{3^{-3}a^6b^{-3}}{a^{-6}b^{-15}c^3} = \frac{a^{6-(-6)}b^{-3-(-15)}}{3^3c^3} = \frac{a^{12}b^{12}}{27c^3}$$

   b. $$\sqrt[3]{\frac{24x^2y^5}{3x^5y^{11}}} = \left(\frac{24x^2y^5}{3x^5y^{11}}\right)^{\frac{1}{3}} = \left(8x^{2-5}y^{5-11}\right)^{\frac{1}{3}} = \left(2^3x^{-3}y^{-6}\right)^{\frac{1}{3}} = (2)^{3\cdot\frac{1}{3}}(x)^{-3\cdot\frac{1}{3}}(y)^{-6\cdot\frac{1}{3}} = 2x^{-1}y^{-2} = \frac{2}{xy^2}$$

2. Diketahui ${}^a\log b = 2, \quad {}^c\log b = 3,$

   ${}^a\log\ b = 2, \quad {}^c\log\ b = 3.$

   $${}^a\log\left((bc)^3\right)^{\frac{1}{2}} = {}^a\log(bc)^{\frac{3}{2}} = \tfrac{3}{2}\ {}^a\log(bc) = \tfrac{3}{2}\left({}^a\log b + {}^a\log c\right) = \tfrac{3}{2}\left({}^a\log b + {}^a\log b \cdot {}^b\log c\right) = \frac{3}{2}\left({}^a\log b + {}^a\log b \cdot \frac{1}{{}^c\log b}\right) = \tfrac{3}{2}\left(2 + 2\cdot\tfrac{1}{3}\right) = \tfrac{3}{2}\cdot\tfrac{8}{3} = 4$$

3. Diketahui:

   Tabungan awal: Rp500.000,00

   Bunga 8% setahun.

a. Tabel Tabungan Alma dalam 5 Tahun Terakhir

Fase	Tinggi
Tahun 1	$1{,}08 \times 500.000 = 540.000$
Tahun 2	$1{,}08^2 \times 500.000 = 583.200$
Tahun 3	$1{,}08^3 \times 500.000 = 629.856$
Tahun 4	$1{,}08^4 \times 500.000 = 680.244$
Tahun 5	$1{,}08^5 \times 500.000 = 734.664$

b. Jumlah uang setelah 10 tahun menabung
$= 1{,}08^{10} \times 500.000$
$= 2{,}1589 \times 500.000$
$= 1.079.462$
Jadi, jumlah uang Alma setelah 10 tahun menabung adalah Rp1.079.462,00

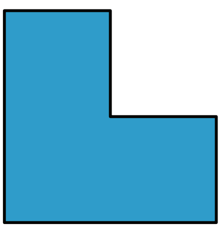
c. Akan dicari nilai n yang memenuhi: $1{,}08^n \times 500.000 = 5.000.000$

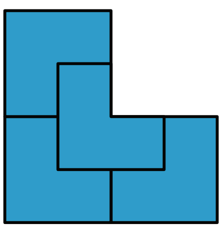
$$\Leftrightarrow 1,08^n \times 500.000 = 5.000.000$$
$$\Leftrightarrow 1,08^n = \frac{5.000.000}{500.000}$$
$$\Leftrightarrow 1,08^n = 10$$
$$\Leftrightarrow n = {}^{1,08}\log 10$$

Jadi, tabungan Alma akan cukup Rp5.000.000,00 setelah 30 tahun.

Soal Aplikasi

4. Sebuah bangun berbentuk seperti di bawah ini. Bangun tersebut kemudian dibagi menjadi 4 bangun yang kongruen.


Tahap 0


Tahap 1

a. Tabel yang Merepresentasikan Banyaknya bangun yang Kongruen di Setiap Tahap

Fase ke-	0	1	2	3	4	...
Banyak Bangun yang Kongruen	1	4	16	64	256	...

Tabel dapat dilanjutkan siswa hingga fase yang diinginkan.

b. Pada setiap fase x, masing-masing bangun berubah menjadi 4 bangun kongruen yang lebih kecil, sehingga model matematika untuk menggambarkan permasalahan:

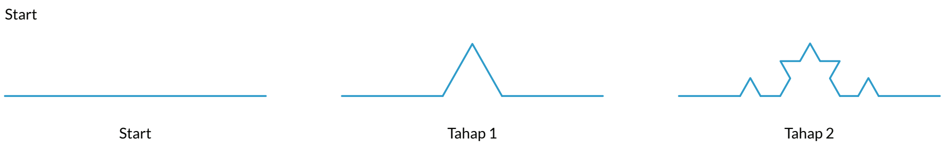
$$f(x) = 4^x$$

dengan $f(x)$ adalah banyak bangun yang kongruen pada fase ke- x.

c. Berdasarkan model matematika yang diperoleh, didapatkan banyaknya bangun kongruen yang dapat dibuat pada tahap ke-12 adalah

$$f(12) = 4^{12} = 16.777.216$$

5. Fraktal tersusun seperti gambar di bawah ini.



a. Tabel yang Merepresentasikan Banyaknya Segmen Garis yang Terbentuk di Setiap Fase

Fase ke-	0	1	2	3	4	...
Banyak segmen garis yang dihasilkan	1	4	16	64	256	...

b. Segmen garis yang dihasilkan setelah 20 tahap pertama.

Pada setiap fase, masing-masing ruas garis berubah menjadi 4 ruas garis lain yang lebih pendek, sehingga model matematika untuk menggambarkan permasalahan

$$f(x) = 4^x$$

dengan $f(x)$ adalah banyak segmen garis yang dihasilkan pada fase ke- x.

Berdasarkan model matematika yang diperoleh, didapatkan banyak segmen garis yang dihasilkan setelah 20 tahap pertama adalah:

$$f(20) = 4^{20} = 1.099.511.627.776$$

6. Penjualan tas pada bulan kedua $\frac{3}{4}$ dari penjualan tas pada bulan pertama. Demikian pula pada bulan ketiga, penjualan tas hanya $\frac{3}{4}$ dari bulan kedua dan seterusnya.
   a. Banyak tas yang terjual pada bulan kedua: $\dfrac{3}{4} \times 500 = 375$ buah.

      Banyak tas yang terjual pada bulan ketiga: $\dfrac{3}{4} \times 375 = 281.75 \sim 281$ buah.
   b. Prediksi penjualan pada bulan ke-10: $\left(\dfrac{3}{4}\right)^{10} \times 500 = 28,156 \sim 28$ buah.
   c. Akan dicari bulan ke berapa sehingga prediksi penjualan akan kurang dari 10 tas.

      Sehingga akan dicari nilai *n* sehingga:

      $\left(\frac{3}{4}\right)^n \times 500 = 10 \Leftrightarrow \left(\frac{3}{4}\right)^n = \frac{1}{50}$

      $n = {}^{\frac{3}{4}}\log\left(\dfrac{1}{50}\right)$

      $n = 13,59$

      Jadi, penjualan akan kurang dari 10 tas terjadi pada bulan ke-13 atau 14.
7. Intensitas gempa = $5.011.872 I_0$.
   a. Magnitudo gempa dalam Skala Richter

      $M = \log\left(\dfrac{I}{I_0}\right) = \log\left(\dfrac{5.011.872 I_0}{I_0}\right) = \log 5.011.872 = 6,69\ \text{SR}$
   b. Diketahui $M = 5{,}9\ SR$

      Diperoleh:

      $5,9 = \log\left(\dfrac{I}{I_0}\right) \Leftrightarrow \left(\dfrac{I}{I_0}\right) = 10^{5,9} \Leftrightarrow \left(\dfrac{I}{I_0}\right) = 794.328,234 \Leftrightarrow$

      Sehingga didapatkan intensitas gempanya $794.328{,}234\, I_0$

Soal Penalaran

8. Panjang hipotenusa pada ruang cangkang ke-n

Ruang Cangkang ke-	Panjang Hipotenusa
1	$h=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$
2	$h=\sqrt{\left(\sqrt{2}\right)^2+1^2}=\sqrt{3}$
3	$h=\sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2+1^2}=\sqrt{4}$
4	$h=\sqrt{\left(\sqrt{4}\right)^2+1^2}=\sqrt{5}$
...	...
n	$h=\sqrt{\left(\sqrt{n}\right)^2+1^2}=\sqrt{n+1}$

Jadi, panjang hipotenusa pada ruang cangkang ke-n adalah $\sqrt{n+1}$

9. Bilangan satuan dari 7^{123}
Perhatikan polanya.

7^n	Satuan
7^1	7
7^2	9
7^3	3
7^4	1
7^5	7
7^6	9
7^7	3
7^8	1

Terlihat hasil angka satuan dari perpangkatan bilangan 7 berulang setiap 4 kali.

Karena $123 \div 4 = 30$ sisa 3, berarti satuan pada 7^{123} akan sama dengan satuan dari 7^3 yaitu 3.

10. Model matematika untuk menggambarkan permasalahan di atas adalah $f(n) = 100(1\text{-}0{,}4)^n$, dengan n adalah banyak filter cahaya yang digunakan.

    Sehingga banyak filter cahaya yang dibutuhkan agar intensitas cahaya menjadi kurang dari 5% adalah

    $$5 = 100(1 - 0,4)^n$$
    $$5 = 100(0,6)^n$$
    $$\frac{5}{100} = (0,6)^n$$
    $$n = {}^{0,6}\log\frac{5}{100}$$
    $$n = 5,86 \sim 6$$

    Jadi, banyak filter yang dibutuhkan adalah 6 filter cahaya.

Refleksi

Pada akhir pembelajaran bab ini, minta siswa untuk memikirkan kembali apa saja yang sudah mereka pelajari dengan menjawab pertanyaan-pertanyaan penuntun sebagai upaya guru untuk memastikan bahwa siswa sudah mencapai tujuan pembelajaran. Uji Kompetensi juga diberikan untuk mengukur ketercapaian tujuan pembelajaran dari bab ini.

1. Apa itu eksponen dan logaritma?
   Eksponen atau bilangan berpangkat didefinisikan sebagai berikut:
   Jika a adalah bilangan real dan n adalah bilangan bulat positif, maka a^n menyatakan hasil kali bilangan a sebanyak n faktor dan ditulis dengan $a^n = \underbrace{a \times a \times a \times a \times \cdots \times a}_{n\ faktor}$.

   Logaritma didefinisikan sebagai berikut.
   Misalkan a adalah bilangan positif dengan $0<a<1$ atau $a>1$, $b>0$, maka berlaku ${}^a\log b = c$ jika dan hanya jika $b = a^c$. Di mana a adalah bilangan pokok atau basis logaritma, b adalah numerus, dan c adalah hasil logaritma.
2. Apa perbedaan dari fungsi pertumbuhan eksponensial dan fungsi penurunan eksponensial? Berikan masing-masing satu contoh.

   Fungsi pertumbuhan eksponen menunjukkan tingkat pertumbuhan yang berbanding lurus dengan besarnya nilai kuantitas, misalnya pertumbuhan bakteri atau virus (siswa boleh memberikan contoh lainnya).
   Penambahan jumlah kuantitasnya bisa dikatakan signifikan sedangkan peluruhan

eksponensial menggambarkan penurunan secara konsisten pada periode waktu tertentu, misalnya peluruhan zat radioaktif (siswa boleh memberikan contoh lainnya).

3. Apa hubungan antara eksponen dan logaritma?

   Eksponen merupakan kebalikan dari logaritma. Kita kembalikan pada definisi logaritma, yaitu misalkan a adalah bilangan positif dengan $0<a<1$ atau $a>1$, $b>0$, maka berlaku $b = c$ jika dan hanya jika $b = a^c$ di mana a adalah bilangan pokok atau basis logaritma, b adalah numerus, dan c adalah hasil logaritma.

4. Berikan 1 contoh penerapan logaritma dalam kehidupan sehari-hari, misalnya penentuan waktu yang dibutuhkan oleh bakteri untuk membelah menjadi sejumlah bakteri. Jawaban siswa bisa bervariasi.

Kunci Jawaban

Uji Kompetensi

1. Selesaikanlah.

a. $$\left(\frac{x^{-5}y^4}{xy^3}\right)^{-2}\left(\frac{x^7y^{-3}}{x^{-4}y^6}\right)^{-\frac{1}{2}} = \left(\frac{x^{10}y^{-8}}{x^{-2}y^{-6}}\right)\left(\frac{x^{-\frac{7}{2}}y^{\frac{3}{2}}}{x^2y^{-3}}\right)$$
$$= \left(x^{12}y^{-2}\right)\left(x^{-\frac{11}{2}}y^{\frac{9}{2}}\right)$$
$$= (x)^{\frac{24-11}{2}}(y)^{\frac{-4+9}{2}}$$
$$= x^{\frac{13}{2}}y^{\frac{5}{2}}$$

b. $$\frac{\left(m^{10}n^{-2}\right)^3\left(m^5n^{-5}\right)^3}{mn} = \frac{\left(m^{15}n^{-7}\right)^3}{mn}$$
$$= \frac{m^{45}n^{-21}}{mn}$$
$$= m^{44}n^{-22}$$
$$= \frac{m^{44}}{n^{22}}$$

c. $$\frac{p+q}{\sqrt{p}-\sqrt{q}} = \frac{p+q}{\sqrt{p}-\sqrt{q}} \times \frac{\sqrt{p}+\sqrt{q}}{\sqrt{p}+\sqrt{q}}$$
$$= \frac{(p+q)\left(\sqrt{p}+\sqrt{q}\right)}{p-q}$$

d. $$\log\left(\frac{t+6}{36-t^2}\right) = \log\frac{t+6}{(6+t)(6-t)}$$
$$= \log\frac{1}{6-t}$$

2. Diketahui:

Banyak bakteri = 500

Pembelahan menjadi 2 terjadi setiap 1 jam.

a. Fungsi yang menyatakan hubungan antara banyak bakteri setelah jam tertentu adalah $f(x) = 500(2)^x$

b. Waktu yang dibutuhkan sehingga koloni bakteri tersebut berjumlah 5.000 bakteri adalah:

$$5000 = 500 \cdot 2^x$$
$$10 = 2^x$$
$$x = {}^2\log 10$$
$$= 3,32$$

Jadi, waktu yang dibutuhkan sehingga koloni bakteri menjadi 5.000 bakteri adalah 3,32 jam.

c. Waktu yang dibutuhkan sehingga koloni bakteri tersebut mencapai 100.000 bakteri adalah:

$$100000 = 500(2)^x$$
$$\frac{100000}{500} = (2)^x$$
$$200 = (2)^x$$
$$x = {}^2\log 200$$
$$x = 7,64$$

Jadi, waktu yang dibutuhkan sehingga koloni bakteri menjadi 100.000 bakteri adalah 7,64 jam.

3. Diketahui:

Ketinggian bola = 5 m

Tinggi lambungan ke-n = $\frac{3}{4}$ dari tinggi sebelumnya.

a. Ketinggian bola tersebut pada lambungan ke-5

Model matematika yang menggambarkan kondisi di atas adalah

$$f(n) = 5 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^n$$

Ketinggian bola pada lambungan ke-5 adalah:

$$f(5) = 5 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^5$$
$$= 5 \cdot \frac{243}{1024}$$
$$= 1,186$$

b. Akan ditentukan lambungan ke-n ketika ketinggian bola adalah 0

Perhatikan tabel pengamatan berikut ini:

Fase	Tinggi
0	5
1	3,75
2	2,8125
3	2,109375
4	1,582031
5	1,186523
6	0,889893
7	0,667419
8	0,500565
9	0,375423
10	0,281568
11	0,211176
12	0,158382
13	0,118786
14	0,08909
15	0,066817

Jika diperhatikan, pada lambungan ke-15, ketinggian bola sudah 6 cm atau dengan kata lain bola bisa berhenti melambung. Ajak siswa untuk mendiskusikan hal tersebut. Kapan bola benar-benar berhenti melambung. Untuk memudahkan siswa melakukan mencari tinggi bola di setiap fase lambungan, guru dapat mengarahkan siswa untuk menggunakan Microsoft Excel.

4. Tabungan awal = Rp2.500.000,00
   Bunga = 10% per tahun.
   a. Banyak tabungan Dina pada 5 tahun pertama

      Model matematika untuk permasalahan di atas adalah

$$f(x) = 2.500.000 \times (1 + 0,1)^x$$

Sehingga tabungan pada 5 tahun pertama adalah

$$
\begin{aligned}
f(5) &= 2.500.000 \times (1 + 0,1)^5 \\
&= 2.500.000 \times (1,1)^5 \\
&= 2.500.000 \times 1,61051 \\
&= 4.026.275
\end{aligned}
$$

b. Lama Dina harus menyimpan uang di bank agar tabungannya tersebut menjadi dua kali lipat (Rp5.000.000) dari tabungan awalnya

Akan dicari nilai x yang memenuhi:

$$
\begin{aligned}
5.000.000 &= 2.500.000 \times (1 + 0,1)^x \\
2 &= (1,1)^x \\
x &= {}^{1,1}\log 2 \\
&= 7,27 \approx 7
\end{aligned}
$$

Jadi, tabungan Alma akan cukup Rp5.000.000,00 setelah 7 tahun.

Materi Pengayaan

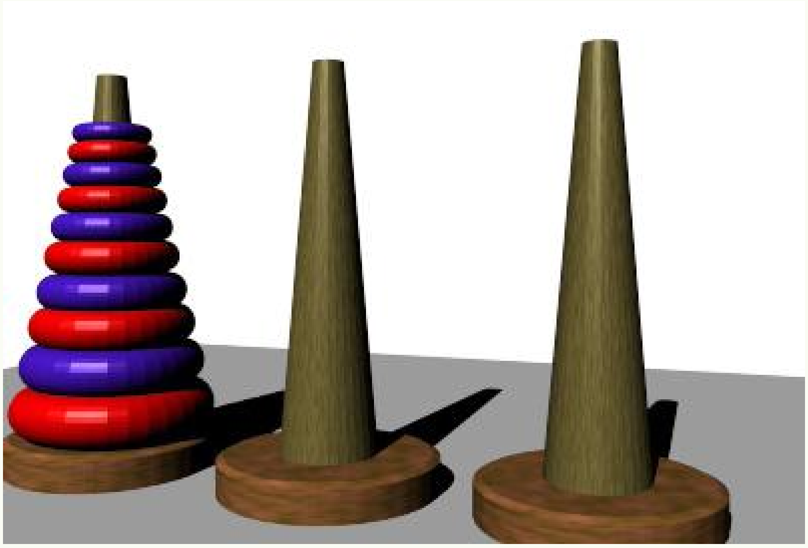
Menara Hanoi

Menara Hanoi adalah teka-teki terkenal yang ditemukan pada tahun 1883 oleh Edouard Lucas, seorang matematikawan Perancis. Lucas mendasarkan teka-teki itu pada legenda ini:

Pada awal waktu, para imam di sebuah kuil diberikan tiga tiang emas. Di salah satu tiang, 64 cakram emas ditumpuk, masing-masing sedikit lebih kecil dari yang di bawahnya. Para imam diberi tugas itu memindahkan semua cakram ke salah satu tiang lainnya sambil berhati-hati untuk mengikuti aturan ini:

- *Pindahkan hanya satu cakram pada satu waktu.*
- *Jangan pernah meletakkan cakram yang lebih besar di atas cakram yang lebih kecil.*

Saat mereka menyelesaikan tugas, kuil akan runtuh dan dunia akan lenyap.



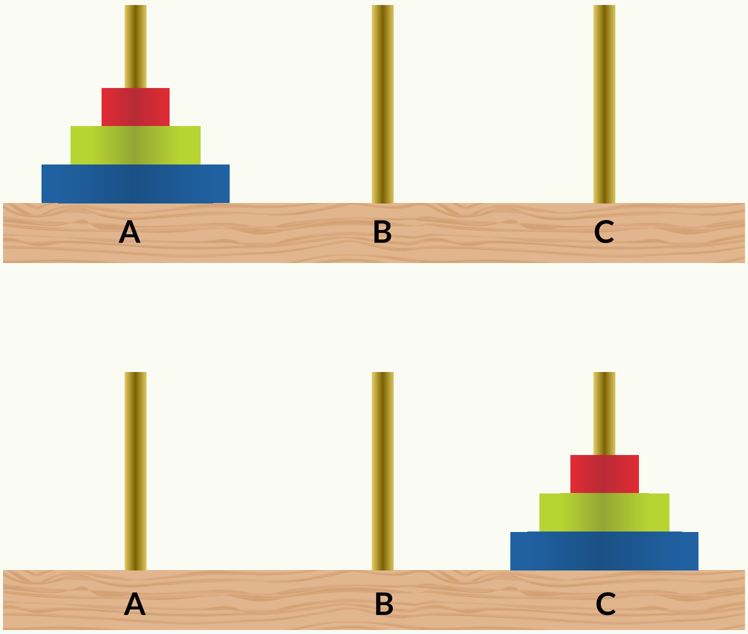
Gambar 1.1 Menara Hanoi

Sumber: Wikimedia.com/ GeniXPro

Pada materi pengayaan ini, peserta didik akan mencari tahu berapa lama waktu yang dibutuhkan untuk memindahkan semua cakram dari satu tiang ke tiang lainnya. Kita akan mulai dengan mengasumsikan cakram begitu besar dan berat sehingga para imam hanya dapat memindahkan satu cakram per menit.

Ayo Berpikir Kritis

Bayangkan tiang diberi label A, B, dan C dan bahwa cakram mulai di Tiang A. Karena akan terlalu sulit untuk memikirkan untuk memindahkan 64 cakram, maka mungkin lebih baik mempertimbangkan teka-teki dalam bentuk yang jauh lebih sederhana.



Gambar 1.2 Contoh Menara Hanoi dengan Tiga Cakram

1. Misalkan teka-teki dimulai dengan hanya 1 cakram pada Tiang A. Berapa lama yang diperlukan untuk memindahkan cakram ke Tiang B?
2. Misalkan teka-teki dimulai dengan 2 cakram pada Tiang A. Berapa lama yang diperlukan untuk memindahkan kedua cakram ke Tiang B? Apa gerakannya?
3. Coba lagi dengan 3 cakram. Berapa lama waktu yang dibutuhkan? Apa gerakannya?
4. Prediksikan bagaimana total waktu yang dibutuhkan untuk memecahkan teka-teki akan berubah setiap kali menambah satu cakram.
5. Prediksikan berapa lama waktu yang dibutuhkan untuk memindahkan 64 cakram. Tuliskan prediksi tersebut untuk dibandingkan di akhir eksplorasi.

Ayo Mencoba

Untungnya, peserta didik tidak memerlukan 64 cakram emas untuk mencoba teka-teki Menara Hanoi. Peserta didik dapat memodelkannya dengan beberapa peralatan sederhana. Teka-teki akan terdiri dari 5 "cakram", bukan 64. Kamu akan membutuhkan selembar kertas kosong dan lima balok, berlabel 1, 2, 3, 4, dan 5. Jika peserta didik ada akses jaringan internet, maka peserta didik menggunakan aplikasi daring untuk mensimulasikan ini https://www.mathsisfun.com/games/towerofhanoi.html.

Gambar 1.3 Aplikasi Daring untuk Simulasi Menara Hanoi

Berikan label kertas dengan huruf A, B, dan C dan kemudian tumpuk balok sesuai dengan urutan angkanya, dengan 5 di bagian bawah, di sebelah A.

Untuk memecahkan teka-teki, peserta harus memindahkan semua balok ke posisi lain — baik B atau C — mengikuti aturan berikut:

- Pindahkan hanya satu balok pada satu waktu.
- Jangan pernah meletakkan angka yang lebih besar di atas angka yang lebih kecil.

Ini bukanlah teka-teki yang mudah. Untuk menyelesaikannya, peserta didik mungkin ingin memulai dengan teka-teki hanya menggunakan 2 atau 3 balok. Saat menjelajah, carilah cara yang sistematis untuk memindahkan semua balok ke posisi baru.

Ayo Mencoba

6. Coba lagi menyelesaikan teka-teki untuk menara dengan 1, 2, 3, 4, dan 5 balok. Kali ini, hitunglah jumlah gerakan yang diperlukan untuk menyelesaikan teka-teki. Catat hasilnya pada tabel.

Tinggi Menara	1	2	3	4	5
Banyak gerak					

7. Jelaskan pola yang terlihat yang dapat membantu dalam membuat prediksi tentang berapa gerakan yang dibutuhkan untuk menara yang lebih tinggi.
8. Gunakan pola yang ditemukan untuk mengisis tabel berikut ini. Lalu gunakan balok ke-enam untuk menguji prediksi untuk tinggi menara 6.

Tinggi Menara	6	7	8	9	10
Banyak gerak					

9. Tuliskan ekspresi untuk jumlah gerak yang diperlukan untuk menyelesaikan teka-tekai untuk tinggi menara t.

Hint

Tambahkan 1 untuk setiap isi pada baris kedua table pada pertanyaan 6, dan kemudian perhatikan polanya sekali lagi.

Kembali ke Legenda

10. Asumsikan bahwa satu cakram dipindahkan per menit. Temukan berapa lama dibutuhkan untuk menyelesaikan teka-teki dengan ketinggian yang terdapat pada tabel berikut. Laporkan waktu dengan satuan yang sesuai. (Kemungkinan setelah beberapa saat, menit tidak lagi berguna.)

Tinggi Menara	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Banyak gerak										
Waktu										

11. Berapa lama dibutuhkan untuk memindahkan keseluruhan dari 64 cakram? Berikan jawaban dalam tahun. Bagaimana jawaban ini dibandingkan dengan prediksi mula-mula di pertanyaan 5?
12. Misalnya kamu dapat memindahkan balok dengan kecepatan yang jauh lebih cepat daripada satu per menit. Bagaimana jika cakram yang digunakan para imam lebih kecil dan lebih ringan, jadi mereka juga bisa bekerja lebih cepat?
    a. Jika satu cakram dipindahkan per detik, berapa lama waktu yang dibutuhkan untuk menyelesaikan teka-teki?
    b. Jika 10 cakram dipindahkan per detik, berapa lama waktu yang dibutuhkan untuk selesai?

Apa yang Dipelajari?

13. Saat memindahkan potongan teka-teki Menara Hanoi, kamu sering memiliki dua pilihan tempat untuk meletakkannya. Jelaskan bagaimana kamu memutuskan langkah mana yang harus diambil.
14. Misalkan legenda itu benar dan para imam dapat memindahkan cakram dengan tingkat kecepatan luar biasa, yaitu 10 cakram per detik. Apakah menurut kamu mereka akan menyelesaikan teka-teki sepanjang hidup ini? Jelaskan.
15. Tuliskan artikel surat kabar tentang teka-teki Menara Hanoi. Kamu mungkin dapat menyebutkan legenda dan waktu yang diperlukan untuk memindahkan cakram untuk menara dengan ketinggian berbeda.

Sumber: https://id.wikipedia.org/wiki/Menara_Hanoi