Kementerian Pendidikan, Kebudayaan, Riset, dan Teknologi Republik Indonesia, 2021

Buku Panduan Guru Matematika untuk SMA/SMK Kelas X

Penulis: Dicky Susanto, dkk

ISBN: 978-602-244-537-1

Bab

2

Panduan Khusus

Barisan dan Deret



Setelah mempelajari bab ini, siswa diharapkan dapat:

- 1. mendeskripsikan perbedaan antara barisan aritmetika dan barisan geometri;
- 2. menentukan suku *ke-n* dan beda dari barisan aritmetika:
- 3. menentukan suku ke-n dan rasio dari barisan geometri;
- 4. menyelesaikan permasalahan kehidupan sehari-hari yang berkaitan dengan konsep barisan aritmetika dan barisan geometri;
- 5. menentukan jumlah suku ke-n dari deret aritmetika dan deret geometri;
- 6. menyelesaikan permasalahan kehidupan sehari-hari yang berkaitan dengan konsep deret aritmetika dan deret geometri;
- 7. menentukan jumlah suku dari deret geometri tak hingga;
- 8. menyelesaikan permasalahan kehidupan sehari-hari yang berkaitan dengan konsep deret geometri tak hingga.



Bab Barisan dan Deret bertujuan mengembangkan kemampuan siswa untuk memahami dan bernalar mengenai barisan dan deret. Siswa akan dapat membedakan barisan aritmetika dan barisan geometri. Selain itu, siswa dapat pula membedakan deret aritmetika dan deret geometri. Pada bab Barisan dan Deret, siswa fokus pada membangun pemahaman bagaimana menentukan suku ke-n pada barisan dan jumlah suku pada deret bilangan berdasarkan pemahaman mengenai pola bilangan yang sudah dipelajari di SMP.

Pada subbab A, siswa akan melakukan beberapa kegiatan eksplorasi. Eksplorasi menyusun meja segi empat untuk membangun pemahaman mengenai barisan aritmetika. Dilanjutkan dengan eksplorasi melipat kertas untuk menemukan kembali konsep mengenai barisan geometri.

Pada subbab B, siswa akan melakukan kegiatan eksplorasi terkait membangun pemahaman mengenai deret aritmetika dan deret geometri. Selain itu, kegiatan eksplorasi juga diberikan untuk menggiring siswa memahami deret geometri tak hingga konvergen dan divergen. Melalui bab ini juga, siswa diharapkan dapat memahami penerapan konsep barisan dan deret bagi kehidupan sehari-hari.

Pemahaman mengenai barisan dan deret sangat berguna untuk bidang kajian ilmu lain, seperti penghitungan keuangan di bidang ekonomi, perkembangbiakan sel pada kajian penelitian biologi, serta menghitung lintasan pantulan benda pada ilmu fisika. masalah seperti yang sudah disebutkan sebelumnya. Bagaimana cara menggunakan kedua konsep ini dalam menyelesaikan masalah-masalah seperti di atas? Dan pada konteks apa lagi kedua konsep tersebut dapat digunakan? Semua akan kalian pelajari pada bab ini.

Skema Pembelajaran

Subbab	Waktu (JP)*		Tujuan	Pokok Materi	Kosakata	Bentuk Metode dan Aktivitas	Sumber Utama
A. Barisan	4	1. 2. 8. 4.	 Mendeskripsikan perbedaan antara barisan aritmetika dan barisan geometri. Menentukan suku ke-n dan beda dari barisan aritmetika. Menentukan suku ke-n dan rasio dari barisan geometri. Menyelesaikan permasalahan kehidupan sehari-hari yang berkaitan dengan konsep barisan aritmetika dan barisan geometri. 	Barisan aritmetika Barisan geometri	 Barisan Aritmetika Geometri Beda Rasio Suku ke-n 	Eksplorasi, diskusi, pemaparan, latihan, pemanfaatan teknologi (opsional)	Buku Siswa
B. Deret	4		 Menentukan jumlah suku ke-n dari deret aritmetika dan daret geometri. Menyelesaikan permasalahan kehidupan sehari-hari o Deret yang berkaitan dengan konsep deret aritmetika dan deret geometri. Menentukan jumlah suku dari deret geometri tak hingga. Menyelesaikan permasalahan kehidupan sehari-hari yang berkaitan dengan konsep deret geometri tak hingga. 	Deret aritmetika Deret Geometri geometri tak hingga	 Deret Jumlah n suku pertama Deret tak hingga Konvergen Divergen 	Eksplorasi, diskusi, pemaparan, latihan.	Buku Siswa

Catatan:

^{*} Waktu merupakan saran rentang jam pelajaran. Guru dapat menyesuaikan dengan kondisi aktual pembelajaran.

Panduan Pembelajaran



Sebelum memasuki materi mengenai Barisan dan Deret, guru diharapkan dapat menjelaskan pengamalan belajar yang akan didapat siswa setelah mempelajari bab ini.

Setelah mempelajari bab ini, kalian dapat:

- 1. Mendeskripsikan perbedaan antara barisan aritmetika dan barisan geometri.
- 2. Menentukan suku ke-n dan beda dari barisan aritmetika.
- 3. Menentukan suku ke-n dan rasio dari barisan geometri.
- 4. Menyelesaikan permasalahan kehidupan sehari-hari yang berkaitan dengan konsep barisan aritmetika dan barisan geometri.
- 5. Menentukan jumlah suku ke-n dari deret aritmetika dan deret geometri.
- 6. Menyelesaikan permasalahan kehidupan sehari-hari yang berkaitan dengan konsep deret aritmetika dan deret geometri.
- 7. Menentukan jumlah suku dari deret geometri tak hingga.
- 8. Menyelesaikan permasalahan kehidupan sehari-hari yang berkaitan dengan konsep deret geometri tak hingga.



Kebutuhan Sarana Prasarana dan Media Pembelajaran

- Meja belajar siswa di kelas
- Kertas berbentuk persegi atau persegi panjang



Perkenalkan bab ini dengan menanyakan kepada siswa kapan konsep **Barisan Bilangan** muncul di dalam kehidupan mereka sehari-hari. Setelah itu, sampaikan dua pertanyaan pemantik dan beri tahu siswa bahwa mereka akan memikirkan dan mencoba mendapatkan jawaban terhadap dua pertanyaan ini selama pembelajaran subbab mengenai **Barisan**.

Gunakan bagian **Ayo Mengingat Kembali** mengenai pola bilangan yang sudah dipelajari di SMP. Pertanyaan-pertanyaan berikut dapat digunakan untuk mengaktifkan prapengetahuan siswa:

- Apa itu pola bilangan?
- 2 4 6 8 10 apakah termasuk pola bilangan? Jika ya, termasuk pola bilangan apa susunan bilangan tersebut?
- Ada berapa suku pola bilangan tersebut?
- Dapatkah kamu menyebutkan pola bilangan lain yang terdiri dari 5 suku?



Mulai aktivitas pembelajaran dengan meminta siswa menyebutkan contoh lain dari pola bilangan yang berbeda-beda. Kemudian minta siswa melakukan Eksplorasi 1. Siswa dapat melakukan eksplorasi sendiri-sendiri terlebih dahulu kemudian baru diskusi secara berpasangan atau dalam kelompok, atau langsung bekerja sama berpasangan atau di dalam kelompok.

Eksplorasi 2.1 Meja Segi Empat

Sebelum membahas permasalahan pada eksplorasi 2.1, siswa diminta untuk membentuk kelompok yang terdiri dari 4 orang. Lalu, pada bagian ini, siswa dapat diminta untuk bereksplorasi dengan meja dan kursi yang ada di kelas. Setelah mencoba langsung, siswa diarahkan untuk melengkapi Tabel 2.1

a. Tabel 2.1 Banyak Meja dan Kursi

Banyak meja	1	2	3	4	5	6
Banyak kursi	4	6	8	10	12	14

b. Alternatif jawaban: Karena jumlah orang membentuk pola bilangan 4 6 8 10 12 14 16 18 20. Angka 20 merupakan suku ke-9. Sehingga meja yang dibutuhkan ada 9.

A. Barisan

Materi barisan diawali dengan menggiring siswa menjawab pertanyaan singkat terkait kegiatan eksplorasi 2.1.

Berikut jawaban untuk pertanyaan arahan pada bagian 2.1.

Terdiri dari berapa suku barisan bilangan tersebut? 4 suku

Suku ke-1 dilambangkan dengan $U_1 = \mathbf{4}$

Suku ke-2 dilambangkan dengan U_2 = **6**

Suku ke-3 dilambangkan dengan U_3 = **8**

Suku ke-4 dilambangkan dengan U_4 = 10

Dari kegiatan Eksplorasi 2.1, siswa digiring untuk membangun pemahaman bahwa pola bilangan dengan aturan tertentu akan membentuk barisan bilangan.

1. Barisan Aritmetika

Pada bagian ini, siswa diberikan pemahaman mengenai barisan aritmetika melalui pertanyaan-pertanyaan singkat. Berikut alternatif jawaban pada pertanyaan bagian 2.1.1.

- Selanjutnya, aturan apa yang ada pada barisan bilangan 4, 6, 8, 10 tersebut? **Suku** berikutnya hasil dari suku sebelum ditambah 2.
- Operasi penghitungan apa yang ada di antara suku-suku pada barisan bilangan di atas? Penjumlahan

• Berapakah beda atau selisih antara dua suku yang berdekatan?

$$U_2 - U_1 = 6 - 4 = 2$$

$$U_3 - U_2 = 8 - 6 = 2$$

$$U_4 - U_3 = 10 - 8 = 2$$

• Apakah beda atau selisih antara dua suku yang berdekatan selalu sama? Iya.

Guru memberikan penegasan bahwa suatu barisan dengan beda atau selisih antara dua suku berurutan selalu tetap atau konstan disebut BARISAN ARITMETIKA.



Bagi siswa yang mengalami kesulitan memahami barisan aritmetika, guru diharapkan dapat menambahkan contoh lain yang merupakan barisan aritmetika dan bukan barisan aritmetika serta meminta siswa mengidentifikasi beda dari barisan aritmetika.

Eksplorasi 2.2 Gedung Pertunjukan Seni

Pada eksplorasi 2.2, siswa diajak menemukan kembali rumus menentukan suku ke-n dari barisan aritmetika dengan konteks jumlah kursi pada gedung pertunjukan seni. Siswa diminta untuk menentukan jumlah kursi pada baris ke-15. Beri kesempatan terlebih dahulu kepada siswa untuk menjawab dengan cara mereka sendiri.

Lalu siswa diajak menjawab beberapa pertanyaan yang menggiring ke pemahaman mengenai rumus suku ke-n pada barisan aritmetika.

- Berapa beda atau selisih banyak kursi pada tiap baris? 4 kursi
- Baris ke-1 = 20
- Baris ke-2 = 24 = 20+4 (20 ditambah 4 sebanyak 1 kali) = $20+(1\times4)$
- Baris ke-3 = 28 = 20+4+4 (20 ditambah 4 sebanyak 2 kali) = $20+(2\times4)$
- Baris ke-4 = 32 = 20+4+4+4 (20 ditambah 4 sebanyak 3 kali) = $20+(3\times4)$
- Baris ke-5 = 36 = 20+4+4+4+4 (20 ditambah 4 sebanyak 4 kali) = $20+(4\times4)$
- Jadi, pada Baris ke-15 = 20 ditambah 4 sebanyak 14 Kali = $20+(14 \times 4) = 76$

Setelah mendapatkan jumlah kursi pada baris ke-15, maka siswa diajak menyimpulkan rumus menentukan suku ke-n pada barisan aritmetika adalah $U_n=a+(n-1)\ b.$



Ayo Mencoba

Jika menyelesaikan soal pada contoh dengan menggunakan persamaan 2, maka akan menghasilkan jawaban yang sama.

Setelah pemaparan konsep mengenai menentukan jumlah suku ke-n barisan aritmetika, siswa diminta untuk menyimak contoh soal yang ditampilkan pada Buku Siswa. Selanjutnya, untuk memantapkan pemahaman konsep barisan aritmetika, siswa diberikan kesempatan untuk mengerjakan soal latihan 1.



Diferensiasi

Bagi siswa yang kecepatan belajarnya tinggi (advanced), minta mereka mengerjakan Latihan tanpa bantuan. Pada saat yang sama, guru dapat mendampingi siswa yang mengalami kesulitan.

Kunci Jawaban Latihan 2.1

1. a. 8, 5, 2, -1, ..., ...

Soal di atas adalah barisan aritmetika dengan beda = -3 Dua suku berikutnya: -4, -7

b. 2, 3, 5, 8

Barisan di atas bukan barisan aritmetika.

Dua suku berikutnya: 12, 17

c. -15,-11,-7, ..., ...

Soal di atas adalah barisan aritmetika dengan beda = 4 Dua suku berikutnya: -3, 1

d. 10, 8, 4, -2, ..., ...

Barisan di atas bukan barisan aritmetika.

Dua suku berikutnya: -10, -20

2.
$$b = -2 - 5 = -7$$

 $U_n = a + (n - 1)b$
 $U_{50} = 5 + (50 - 1)(-7)$
 $U_{50} = -338$

3.
$$U_3 = -4\frac{1}{2}$$
 $U_8 = -2$

$$U_3 = a + 2b = -4\frac{1}{2}$$

$$U_8 = a + 7b = -2$$

$$-5b = -2\frac{1}{2}$$

$$b = \frac{-2\frac{1}{2}}{-5}$$

$$b = \frac{1}{2}$$

$$a + 2b = -4\frac{1}{2}$$

$$a + 2\frac{1}{2} = -4\frac{1}{2}$$

$$a + 1 = -4\frac{1}{2}$$

$$a = -4\frac{1}{2} - 1$$

$$a = -5\frac{1}{2}$$

$$U_n = a + (n - 1)b$$

$$U_n = -5\frac{1}{2} + (n - 1)b$$

$$2U_n = -5 + (n - 1)$$

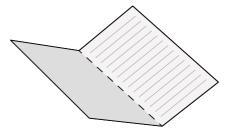
$$2U_n = n - 6$$

$$U_n = \frac{n - 6}{2}$$

2. Barisan Geometri

Dalam mempelajari barisan geometri diawali dengan mengajak siswa melakukan eksplorasi 2.3.

Eksplorasi 2.1 Melipat Kertas



Gambar 2.1 Kertas Dilipat Satu Kali

Pada bagian ini, siswa diminta melakukan eksplorasi yaitu melipat kertas dan menentukan banyak bagian sama besar yang terbentuk dari lipatan kertas tersebut seperti yang tampak pada Gambar 2.1 Selanjutnya siswa diminta untuk mengisi Tabel 2.2

Tabel 2.2 Jumlah Lipatan Kertas dan Bagian Sama Besar yang Terbentuk

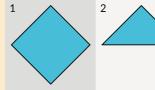
Jumlah melipat kertas	1 kali	2 kali	3 kali	4 kali
Banyaknya bagian sama	2 bagian	4 bagian	8 bagian	16 bagian
besar yang terbentuk	2 Dagian	4 Dagian	o Dagian	10 Dagian

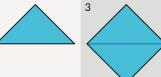
Pada bagian ini, guru dapat meminta siswa menampilkan jawaban pada tabel dan menunjukkan hasil lipatan pada kertas.



Ayo Berpikir Kreatif

Temukan cara melipat kertas yang berbeda. Bagaimana dengan jumlah bagian sama besar yang terbentuk? Apakah sama dengan yang ada pada tabel? Jelaskan.









Selanjutnya, untuk menanamkan konsep mengenai barisan geometri dan rasio, siswa diminta menjawab pertanyaan terkait eksplorasi 2.

- Apakah banyaknya bagian yang sama besar pada lipatan kertas membentuk barisan bilangan? Ya
- Aturan apa yang terdapat pada barisan bilangan tersebut? **Bilangan sesudah** hasil dari bilangan sebelum dikali dengan 2.
- Operasi hitung apa yang ada di antara suku-suku pada barisan bilangan di atas?



• Ayo amati rasio antara dua suku yang berdekatan.

$$\frac{U_2}{U_1} = \frac{4}{2} = 2$$

$$\frac{U_3}{U_2} = \frac{8}{4} = 2$$

$$\frac{U_3}{U_2} = \frac{8}{4} = 2$$

• Apakah rasio antara dua suku yang berdekatan selalu sama? Ya.

Guru memberikan penegasan bahwa suatu barisan dengan rasio antara dua suku berurutan selalu tetap atau konstan disebut BARISAN GEOMETRI. Rasio pada barisan geometri dilambangkan dengan r.



Diferensiasi

Bagi siswa yang mengalami kesulitan memahami barisan geometri, guru diharapkan dapat menambahkan contoh lain yang merupakan barisan aritmetika dan barisan geometri serta meminta siswa mengidentifikasi barisan tersebut bersama dengan teman kelompoknya.

Eksplorasi 2.4 Pembelahan Bakteri

 U_{10} = 2 dikali 3 sebanyak 9 kali

 $U_{10} = 2 \times 3^9$

Pada bagian ini, siswa diminta untuk menentukan jumlah bakteri setelah membelah selama 20 jam. Beri kesempatan kepada siswa untuk menjawab dengan cara mereka sendiri. Setelah itu, siswa diajak menjawab pertanyaan berikut untuk membangun pemahaman mengenai rumus menentukan suku ke-n barisan geometri.

- Suku pertama pada permasalahan di atas adalah 2
- Tiap dua jam, membelah menjadi 3, maka rasio pada barisan di atas adalah 3

Dalam 20 jam, terjadi pembelahan sebanyak 20 jam : 2 jam = 10 kali $\rightarrow n$ = 10.

```
\begin{array}{ll} U_{10}=\dots\\ U_1=2\\ U_2=2\times3\\ U_3=2\times3\times3\\ U_4=2\times3\times3\times3\\ U_5=2\times3\times3\times3\times3\\ \end{array} \qquad \begin{array}{ll} (2\text{ dikali 3 sebanyak 1 kali})=2\times3^1\\ (2\text{ dikali 3 sebanyak 2 kali})=2\times3^2\\ (2\text{ dikali 3 sebanyak 3 kali})=2\times3^3\\ (2\text{ dikali 3 sebanyak 4 kali})=2\times3^4\\ & \cdot\\ & \cdot\\ & \cdot\\ & \cdot\\ & \cdot\\ \end{array}
```

Setelah mendapatkan jumlah bakteri setelah pembelahan selama 20 jam, maka siswa diajak menyimpulkan rumus menentukan suku ke-n pada barisan geometri adalah $U_n=a\,.r^{n-1}$

Setelah uraian konsep mengenai menentukan jumlah suku ke-n barisan geometri, siswa diminta untuk menyimak contoh soal yang ditampilkan pada Buku Siswa. Selanjutnya, untuk memantapkan pemahaman konsep barisan geometri, siswa diberikan kesempatan untuk mengerjakan soal latihan 2.

Kunci Jawaban Latihan 2.2

1. a. $\frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \dots, \dots$

Soal di atas adalah barisan geometri, karena memiliki rasio = 2.

Dua suku berikutnya: 1, 2

b. 25, 5, 1, ..., ...

Soal di atas adalah barisan geometri dengan rasio = $\frac{1}{5}$ Dua suku berikutnya: $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{25}$

2. $r = \frac{32}{64} = \frac{1}{2}$

$$U_n = ar^{n-1}$$

$$U_{10} = 64 \left(\frac{1}{2}\right)^{9-1}$$

$$U_{10} = 2^6 \left(\frac{1}{2}\right)^8$$

$$U_{10} = 2^6 \left(\frac{1}{2^8}\right)$$

$$U_{10} = 2^6 \left(\frac{1}{2^6 \cdot 2^2} \right)$$

$$U_{10} = \frac{1}{2^2}$$

$$U_{10} = \frac{1}{4}$$

3. $U_2 = 80$

ar = 80 ... (persamaan 1)

$$U_6 = 5$$

 $ar^5 = 5 \dots \text{(persamaan 2)}$

Substitusi pers. 1 ke pers. 2

$$ar^{5} = 5$$

$$ar \cdot r^{4} = 5$$

$$80 \cdot r^{4} = 5$$

$$r^{4} = \frac{5}{80}$$

$$r^{4} = \frac{1}{16}$$

$$r = \frac{1}{2}$$

$$ar = 80$$

$$a \cdot \frac{1}{2} = 80$$

$$a = 160$$

$$U_{3} = ar^{2} = 160 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{2} = 40$$

Jadi, tiga suku pertama adalah 160, 80, dan 40.



Tutup pembelajaran dengan meminta siswa melakukan refleksi terhadap apa yang sudah mereka pelajari dengan menjawab pertanyaan refleksi.

Alternatif jawaban pertanyaan pada refleksi:

- Pada barisan aritmetika terdapat beda, sedangkan barisan geometri terdapat
- Dengan cara menentukan beda atau rasio pada barisan yang dketahui.



Alternatif jawaban

Contoh barisan aritmetika dalam kehidupan sehari-hari:

Seorang siswa menabung di koperasi sekolah. Bulan pertama menabung Rp5.000,00, bulan kedua Rp7.000,00, bulan ketiga Rp8.000,00, bulan keempat Rp9.000,00, dan seterusnya. Maka untuk menghitung jumlah uang yang ditabung pada bulan ke-10 dapat ditentukan dengan menggunakan konsep barisan aritmetika.

B. Deret Bilangan



Perkenalkan bab ini dengan menanyakan kepada siswa kapan konsep DERET BILANGAN muncul di dalam kehidupan mereka sehari-hari. Setelah itu, sampaikan dua pertanyaan pemantik dan beri tahu siswa bahwa mereka akan memikirkan dan mencoba mendapatkan jawaban terhadap dua pertanyaan ini selama pembelajaran subbab mengenai DERET.

Gunakan bagian **Ayo Mengingat Kembali** mengenai barisan bilangan yang sudah dipelajari pada subbab sebelumnya. Pertanyaan-pertanyaan berikut dapat digunakan untuk mengaktifkan prapengetahuan siswa:

- Apa itu barisan bilangan?
- $\frac{1}{2} \frac{1}{4} \frac{1}{8} \frac{1}{16}$ apakah termasuk barisan bilangan? Jika ya, apakah bilangan tersebut membentuk barisan aritmetika atau barisan geometri?
- Sebutkan contoh barisan aritmetika dan barisan geometri!

Eksplorasi 2.5 Jabat Tangan

Sebelum mulai kegiatan eksplorasi, bentuk siswa dalam kelompok yang terdiri dari 5-6 siswa. Siswa diminta untuk bereksplorasi dengan melakukan jabat tangan bersama teman satu kelompok. Selanjutnya siswa diarahkan untuk menjawab pertanyaan mengenai banyak jawab tangan yang terjadi.

- Jika ada 2 orang, berapa banyak jabat tangan yang terjadi? 1
- Jika ada 3 orang, berapa banyak jabat tangan yang terjadi? 3
- Jika ada 4 orang, berapa banyak jabat tangan yang terjadi? 6
- Berapa total siswa dalam kelompok, dan berapa banyak jabat tangan yang terjadi?
 5 siswa. Banyak jabat tangan yang terjadi adalah 10.
 - Bagaimana kalian mengetahuinya? Kami mencoba jabat tangan di semua anggota kelompok dan menghitung banyak jabat tangan sebanyak 10 kali.



Apakah banyak jabat tangan di atas membentuk barisan? Jelaskan jawabanmu.

Alternatif jawaban:

Banyak jabat tangan tidak membentuk barisan aritmetika maupun geometri, karena barisan tersebut tidak mengandung beda atau rasio yang tetap.

Dari Eksplorasi 2.5, banyak jabat tangan yang terjadi dapat dinyatakan sebagai berikut.

Banyaknya orang yang hadir	Banyak jabat tangan	Uraian dari banyak jabat tangan
Dua orang	1	1
Tiga orang	3	1 + 2
Empat orang	6	1 + 2 + 3
Lima orang	10	1+2+3+10

Tabel 2.3 Banyak Jabat Tangan yang Terjadi di Kelas

• Apakah uraian dari jumlah jabat tangan merupakan bentuk penjumlahan dari barisan bilangan? Ya

Guru memberikan penegasan bahwa bentuk penjumlahan dari barisan bilangan akan membentuk deret bilangan.

1. Deret Aritmetika

Guru menyampaikan cerita tentang Carl Friedrich Gauss yang memecahkan soal terkait penjumlahan bilangan 1 – 100.

Setelah itu, siswa diajak mencermati kembali deret bilangan tersebut.

$$1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 98 + 99 + 100 = \dots$$

- Apakah bilangan pada deret di atas membentuk barisan? Ya
- Barisan apakah yang dibentuk dari suku-suku pada deret di atas? Barisan aritmetika.

Guru memberikan penegasan bahwa suatu deret yang diperoleh dari menjumlahkan suku-suku pada barisan aritmetika adalah deret aritmetika.

Selanjutnya, guru menggiring siswa untuk memahami bagaimana menemukan kembali rumus jumlah n suku pertama deret aritmetika.

2. Deret Geometri

Eksplorasi 2.6 Jumlah Pasien Terinfeksi Covid-19

Guru mengarahkan siswa untuk memahami rumus jumlah n suku pertama deret geometri melalui eksplorasi 2.6. Diawali dengan menjawab pertanyaan terkait dengan data pada Tabel 2.4.

- Apakah jumlah pasien membentuk barisan bilangan? Ya.
- Berapa beda atau rasio dari barisan di atas? **Rasio** = 3
- Terdiri dari berapa suku barisan tersebut? **Terdiri dari 5 suku**.

Tabel 2.4 Proses Menemukan Kembali Rumus Jumlah Deret Geometri

	1	2	3
$S_{\scriptscriptstyle 2}$: jumlah pasien dua bulan pertama	$S_2 = 4 + 12 = 16$	$S_2 = \frac{36 - 4}{3 - 1} = \frac{32}{2} = 16$	$S_2 = \frac{U_3 - U_1}{r - 1}$
S_3 : jumlah pasien tiga bulan pertama	$S_3 = 4 + 12 + 36$ = 52	$S_3 = \frac{108 - 4}{3 - 1} = \frac{104}{2} = 52$	$S_3 = \frac{U_4 - U_1}{r - 1}$
S_4 : jumlah pasien empat bulan pertama	$S_4 = 4 + 12 + 36$ + 108 = 160	$S_4 = \frac{324 - 4}{3 - 1} = \frac{320}{2} = 160$	$S_4 = \frac{U_5 - U_1}{r - 1}$

Dari tabel 2.5 Guru membimbing siswa dalam menemukan kembali rumus jumlah n suku pertama deret geometri.

Setelah penjabaran konsep mengenai menentukan jumlah n suku pertama deret aritmetika dan geometri, siswa diminta untuk menyimak contoh soal yang ditampilkan pada Buku Siswa. Selanjutnya, untuk memantapkan pemahaman konsep deret bilangan, siswa diberikan kesempatan untuk mengerjakan soal latihan 3.

Kunci Jawaban Latihan 2.3

Jumlah bilangan kelipatan 4 di antara 10 – 100:

$$12 + 16 + \dots + 96$$

$$a = 12$$

$$b = 4$$

$$U_n = 96$$

$$a + (n - 1)b = 96$$

$$12 + (n - 1)4 = 96$$

$$12 + 4_n - 4 = 96$$

$$8 + 4_n = 96$$

$$4_n = 88$$

$$n = 22$$

$$S_n = \frac{n}{2}(a - U_n)$$

$$S_2 = \frac{22}{2}(12 + 96) = 11(108) = 1.188$$

$$S_2 = \frac{22}{2} (12 + 96) = 11 (108) = 1.188$$

2.
$$a = 9$$

$$r = 3$$

$$S_n = 9.837$$

$$9.837 = \frac{9(3^n - 1)}{3 - 1}$$

$$9.837 = \frac{9(3^n - 1)}{2}$$

$$19.674 = 9(3^n - 1)$$

$$2.186 = (3^n - 1)$$

$$2.187 = 3^n$$

$$n = 13$$

3.
$$\frac{3}{2} + 3 + 6 + 12 + \dots + Y = \frac{762}{4}$$

$$a = \frac{3}{2} \qquad r = \frac{6}{3} = 2$$

$$S_n = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1}$$

$$\frac{764}{4} = \frac{\frac{3}{2}(r^n - 1)}{2 - 1}$$

$$\frac{764}{4} = \frac{3}{2}(r^n - 1)$$

$$1.524 = 12(2^n - 1)$$

$$127 = 2^n - 1$$

$$128 = 2^n$$

$$n = 7$$

$$Y = U_7 = ar^6 = \frac{3}{2} \cdot 2^6 = 3 \cdot 2^5 = 96$$

3. Deret Geometri Tak Hingga

Eksplorasi 2.7 Panjang Lintasan Bola

Siswa diminta untuk menyimak permasalahan yang ada pada eksplorasi 2.7. Lalu, siswa diajak untuk mencobakan langsung melempar bola seperti yang ada pada Gambar 2.9 yaitu siswa melemparkan bola dari ketinggian tertentu, misal dari atas meja. Setelah itu, siswa diminta melemparkan bola dengan cara yang berbeda yaitu dari bawah ke atas.

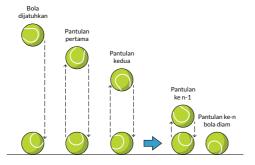
Selanjutnya siswa diarahkan untuk menjawab pertanyaan terkait eksplorasi 2.7.

- Menurutmu, apakah tinggi pantulan bola pada permasalahan di atas membentuk deret geometri? Ya. Bagaimana kalian mengetahuinya? Karena disebutkan pada permasalahan bahwa setiap kali bola memantul, tingginya menjadi $\frac{1}{4}$ kali dari tinggi pantulan sebelumnya. Maka $\frac{1}{4}$ adalah rasio pada deret geometri.
- Setelah melakukan percobaan, apakah kalian mengetahui dengan pasti berapa kali bola memantul sampai akhirnya berhenti? Tidak. Karena banyak pantulan bola tidak terhitung.

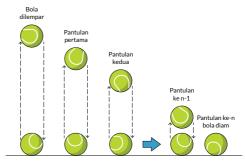


Apakah panjang lintasan bola akan sama jika bola dijatuhkan dari ketinggian tertentu atau dilempar dari bawah? Jelaskan jawabanmu

Alternatif jawaban: Panjang lintasannya akan berbeda. Jika bola dijatuhkan dari ketinggian tertentu, panjang lintasannya akan lebih panjang dari lintasan bola yang dilempar dari bawah, seperti pada gambar di bawah ini.



Lintasan Bola Dijatuhkan dari Ketinggian Tertentu



Lintasan Bola Dilempar dari Bawah

Lalu siswa digiring untuk memahami rumus dari jumlah deret geometri tak hingga. Dan tak lupa menjelaskan perbedaan dari deret geometri tak hingga konvergen dan divergen.



Ayo Berpikir Kritis

Mengapa jumlah suku deret geometri tak hingga divergen hasilnya ±∞? Jelaskan jawabanmu

Alternatif jawaban: Deret geometri tak hingga yang divergen berarti deret geometri tak hingga yang tidak terbatas jumlahnya. Jadi, jika r < -1 maka jumlah deret geometri tak hingga tersebut $-\infty$ dan jika r > 1 maka jumlah deret geometri tersebut adalah $+\infty$.



Diferensiasi

Bagi siswa yang telah memahami deret geometri tak hingga, diharapkan dapat mempresentasikan penyelesaian dari permasalahan pada eksplorasi 2.7. Lalu bagi siswa yang mengalami kesulitan dalam memahami deret geometri tak hingga, guru diharapkan dapat memberikan contoh lain dari deret geometri tak hingga yang konvergen dan divergen.

Setelah penjelasan konsep mengenai menentukan jumlah deret geometri tak hingga, siswa diminta untuk menyimak contoh soal yang ditampilkan pada Buku Siswa. Selanjutnya, untuk memantapkan pemahaman konsep deret geometri tak hingga, siswa diberikan kesempatan untuk mengerjakan soal latihan 4.

Kunci Jawaban Latihan 2.4

$$S_{\infty} = 10$$

$$a = x$$

$$S_{\infty} = \frac{a}{1 - r}$$

$$10 = \frac{x}{1 - r}$$

$$10 - 10r = x$$

$$-10r = x - 10$$

$$r = \frac{x - 10}{-10}$$

$$r = \frac{10 - x}{10}$$

Karena deret tak hingga merupakan deret konvergen, maka rasio berada di rentang -1 < r < 1

$$-1 < \frac{10 - x}{10} < 1$$

$$-10 < 10 - x < 10$$

$$-20 < -x < 0$$

$$0 < x < 20$$

2.
$$1 + (m-1) + (m-1)^2 + (m-1)^3 + \dots$$

 $a = 1$ $r = \frac{(m-1)^2}{m-1} = m-1$

Karena deret konvergen, maka -1 < r < 1

$$-1 < m - 1 < 1$$

 $-2 < m < 0$

3.
$$4 + 12 + 36 + 108 + \dots$$

 $r = 124 = 3$



Ayo Berefleksi

Tutup pembelajaran dengan meminta siswa melakukan refleksi terhadap apa yang sudah mereka pelajari dengan menjawab pertanyaan refleksi.

Alternatif jawaban pertanyaan pada refleksi:

- Perbedaan deret aritmetika dan deret geometri yaitu pada beda dan rasio dari deret tersebut. Lalu, deret merupakan penjumlahan dari suatu barisan, maka suku-suku pada deret bilangan dipisahkan tanda (+) atau operasi penjumlahan, sedangkan barisan tidak.
- Deret tak hingga konvergen merupakan deret tak hingga yang jumlahnya masih terbatas, sedangkan deret divergen adalah deret tak hingga yang jumlahnya tak terbatas sehingga dinyatakan dengan $\pm\infty$.

Kunci Jawaban Latihan 2.5

Soal Pemahaman

1. Alternatif penyelesaian.

$$U_3$$
 = 28.500 a + 2 b = 28.500 (persamaan 1) U_7 = 22.500 a + 6 b = 22.500 (persamaan 2)

Eliminasi Persamaan 1 dan 2

$$a + 2b = 28.500$$

$$a + 6b = 22.500 - 4b = 6.000$$

$$b = -1.500$$

$$a + 2b = 28.500$$

$$a + 2(-1.500) = 28.500$$

$$a - 3.000 = 28.500$$

$$a = 31.500$$

$$U_n = 0$$

$$a + (n-1)b = 0$$

$$31.500 + (n - 1)(-1.500) = 0$$

$$31.500 - 1.500n + 1.500 = 0$$

$$33.000 = 1.500n$$

$$n = \frac{33.000}{1.500}$$

$$n = 22$$

2. Alternatif penyelesaian.

$$U_3$$
 = 20
 ar^2 = 20 Persamaan 1
 U_5 =80
 ar^4 = 80 Persamaan 2

Substitusi pers. 1 ke pers. 2

$$ar^4 = 80$$

 $ar^2 r^2 = 80$
 $20r^2 = 80$
 $r^2 = 4$, $r = 2$
 $ar^2 = 20$
 $a \cdot 2^2 = 20$
 $a = 5$
 $U_{10} = ar^9 = 5.2^9 = 2.560$

3. Alternatif penyelesaian.

a.
$$1 + \frac{5}{3} + \frac{7}{3} + \cdots + \frac{23}{3}$$

$$a = 1 \qquad b = \frac{7}{3} - \frac{5}{3} = \frac{2}{3}$$

$$U_n = \frac{23}{3}$$

$$a + (n-1)b = \frac{23}{3}$$

$$1 + (n-1)\frac{2}{3} = \frac{23}{3}$$

$$1 + \frac{2}{3}n - \frac{2}{3} = \frac{23}{3}$$

$$\frac{2}{3}n = \frac{23}{3} - \frac{1}{3}$$

$$n = \frac{\frac{22}{3}}{\frac{2}{3}} = \frac{22}{3} \cdot \frac{3}{2} = 11$$

$$S_{11} = \frac{11}{2}(a + U_{11}) = \frac{11}{2}\left(1 + \frac{23}{3}\right) = \frac{11}{2} \cdot \frac{26}{3}$$

$$= \frac{143}{3}$$

b.
$$\frac{1}{27} + \frac{1}{9} + \dots + 243$$

$$a = \frac{1}{27} \qquad r = \frac{\frac{1}{9}}{\frac{1}{27}} = 3$$

$$U_n = 243$$

$$a \cdot r^n = 243$$

$$\frac{1}{27} \cdot 3^n = 243$$

$$3^n = 243 : \frac{1}{27} = 243 \cdot 27 = 3^5 \cdot 3^3 = 3^8$$

$$S_n = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1} = \frac{\frac{1}{27}(6.560)}{2}$$
$$= \frac{3.280}{27}$$

Soal Aplikasi

4.
$$U_3 = ar^2 = 90$$

 $10r^2 = 90$
 $r^2 = \frac{90}{10}$
 $r^2 = 9$
 $r = 3$

Pertambahan penduduk pada tahun 2025 adalah

$$U_5 = ar^4$$

$$= 10 \times 3^4$$

$$= 10 \times 81$$

$$= 810$$

Jadi, jumlah pertambahan penduduk pada tahun 2025 adalah 810 orang.

5.
$$U_{60} = U_n$$

$$S_n = \frac{n}{2} (a + U_n)$$

$$30.000 = 30 (50 + U_n)$$

$$30 (50 + U_n) = 30.000$$

$$50 + U_n = 1.000$$

$$U_n = 950$$

Jadi, Pak Artus mengumpulkan sebanyak 950 butir telur pada hari terakhir.

6. Alternatif penyelesaian.

Minggu Pertama =
$$U_1$$
= a = 24
Minggu Kedua = 2 × U_1 = 2 × 24 = 48

Minggu Ketiga =
$$U_3$$
= 96 = 2 × 48

$$U_n = 2^{n-1} \times U_1$$

$$U_8 = 2^{8-1} \times 24 = 2^7 \times 24 = 128 \times 24$$

$$= 3.072$$

$$S - n = \frac{n}{2} (a + U_n)$$

$$S_8 = \frac{8}{2} (24 + 3.072)$$

$$S_8 = 4(3.096)$$

$$S_n = 12.384$$

Jadi, total jumlah pasien pada bulan kedua adalah 12.384 orang.

7. Panjang lintasan ketika bola jatuh:

$$a = 8,$$
 $r = \frac{3}{5}$ $S_{\infty} = \frac{a}{1-r} = \frac{8}{1-\frac{3}{5}} = \frac{8}{\frac{2}{5}} = 8.\frac{5}{2} = 20m$

Panjang lintasan ketika bola memantul ke atas:

$$a = 8.\frac{3}{5} = \frac{24}{5}, \qquad r = \frac{3}{5}$$

$$S_{\infty} = \frac{a}{1 - r} = \frac{\frac{24}{5}}{1 - \frac{3}{5}} = \frac{\frac{24}{5}}{\frac{2}{5}} = \frac{24}{5}.\frac{5}{2}$$

$$= 12m$$

Total panjang lintasan bola

$$20m + 12m = 32m$$

Soal Penalaran

8. Luas lingkaran terbesar: 1386 cm^2 Luas Lingkaran II (kecil): 154 cm^2 Barisan Aritmetika:

$$K_1, K_1, K_3, K_4, K_5$$

$$K_3 = U_3 = \cdots$$

Luas lingkaran terbesar = 1386 cm^2

$$\pi r^{2} = 1386cm^{2}$$

$$\frac{22}{7}r^{2} + = 1386cm^{2}$$

$$r^{2} = 1386cm^{2} \cdot \frac{7}{22}$$

$$r^{2} = 441cm^{2}$$

r = 21

Maka keliling Lingkaran pertama:

$$(U_1) = a = 2.\pi \cdot r = 2.\frac{22}{7}.21 = 132cm$$

Luas Lingkaran kecil = 154 cm^2

$$\pi r^2 = 154cm^2$$

$$\frac{22}{7}r^2 = 154cm^2$$

$$r^2 = 154cm^2.\frac{7}{22}$$

$$r^2 = 49cm^2$$

$$r = 7cm$$

Maka keliling lingkaran terkecil

$$U_5 = 2.\pi \cdot r = 2.\frac{22}{7} \cdot 7 = 44cm$$

Keliling lingkaran membentuk barisan Aritmetika.

$$U_5 = a + 4b$$

$$44 = 132 + 4b$$

$$4b + 132 = 44$$

$$4b = 44 - 132$$

$$4b = -88$$

$$b = -22$$

Sehingga keliling lingkaran ketiga:

$$U_3 = a + 2b = 132 + 2(-22) = 88$$

Jadi keliling lingkaran ketiga adalah 88cm

9.
$$U_1 = 3$$

$$U_7$$
= 192

Ditanya:

$$U_{\!_{2}}$$
 , $U_{\!_{3}}$, $U_{\!_{4}}$, $U_{\!_{5}}$, $U_{\!_{6}}$!

Penyelesaian

$$U_1 = a = 3$$

$$U_7 = 192$$

$$ar^6 = 192$$

$$3r^6 = 192$$

$$r^6 = 64$$

$$r = 2$$

$$U_2 = ar = 3 \times 2 = 6$$

$$U_3 = ar^2 = 3(2^2) = 3(4) = 12$$

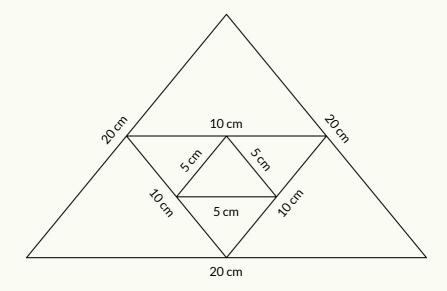
$$U_{\Delta} = ar^3 = 3(2^3) = 3(8) = 24$$

$$U_5 = ar^4 = 3(2^4) = 3(16) = 48$$

$$U_6 = ar^5 = 3(2^5) = 3(32) = 96$$

Jadi, 5 bilangan yang disisipkan di antara 3 dan 192 agar susunan bilangan tersebut membentuk barisan geometri berturut-turut adalah 6, 12, 24, 48, dan 96.

10.



Keliling semua segitiga pertama (K_1) = 3 $_s$ = 3×20 = 60 cm

$$K_{2} = 3s = 3\left(\frac{1}{2} \times 20\right) = 3\left(\frac{1}{2} \times 20\right) = 30cm$$

$$K_{3} = 3s = 3\left(\frac{1}{2} \times 10\right) = 3\left(\frac{1}{2^{2}} \times 20\right) = 15cm$$

$$K_{n} = 3s = 3 \times \left(\frac{1}{2^{n-1}} \times s\right)$$

$$K_{4} = 3s = 3 \times \left(\frac{1}{2^{4-1}} \times 20\right) = 3 \times \left(\frac{1}{2^{3}} \times 20\right) = 3 \times \left(\frac{1}{8} \times 20\right) = 3 \times 2, 5 = 7, 5$$

$$K_{5} = 3s = 3 \times \left(\frac{1}{2^{4}} \times 20\right) = 3 \times \left(\frac{1}{16} \times 20\right) = \times 1, 25 = 3, 75$$

$$K_{6} = 3s = 3 \times \left(\frac{1}{2^{5}} \times 20\right) = 3 \times \left(\frac{1}{32} \times 20\right) = \times 0, 625 = 1, 875$$

Total:

$$K_1 + K_2 + K_3 + K_4 + K_5 + K_6 = 60 + 30 + 15 + 7,5 + 3,75 + 1,875 = 118,125 \ \mathrm{cm}$$
 Jadi, total keliling semua segitiga adalah 118,125 cm.

Kunci Jawaban

Uji Kompetensi

1. a.
$$4+2+1+\dots$$

$$U_1=a=4$$

$$U_{10} \, \operatorname{dan} S_{10}=\dots$$

Alternatif penyelesaian:

$$r = \frac{U_2}{U_1} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$U_n = ar^{n-1}$$

$$U_{10} = 4\left(\frac{1}{2}\right)^9 = 4\left(\frac{1}{512}\right) = \frac{1}{128} = \frac{1}{2^7}$$

$$S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$$

$$S_{10} = \frac{4(1-\left(\frac{1}{2}\right)^9)}{1-\frac{1}{2}} = \frac{4\left(1-\frac{1}{512}\right)}{\frac{1}{2}} = \frac{4\left(\frac{511}{512}\right)}{\frac{1}{2}} = 8\left(\frac{511}{512}\right) = \frac{511}{2^6}$$

Jadi, suku ke-10 dan jumlah 10 suku pertama dari deret tersebut

berturut-turut adalah
$$\frac{1}{2^7}$$
 dan $\frac{511}{2^6}$

a.
$$4 + 1 + (-2) + \dots$$

$$U_{1} = a = 4$$

$$U_{10} \, \operatorname{dan} \, S_{10} = \cdots$$

$$b = U_2 - U_1 = 1 - 4 = -3$$

$$U_{10} = a + 9b = 4 + 9(-3) = 4 - 27 = -23$$

$$S_{10} = \frac{10}{2} (a + U_{10}) = 5(4 + (-23)) = 5(-19) = -95$$

Jadi, suku ke-10 dan jumlah 10 suku pertama dari deret tersebut berturutturut adalah -23 dan -95

2.
$$U_2 + U_5 + U_{20} = 54$$

 $U_9 = \cdots$

Alternatif penyelesaian:

$$U_2 + U_5 + U_{20} = 54$$

$$(a+b)+(a+4b)+(a+19b) = 54$$

$$3a + 24b = 54$$

$$3(a+8b) = 54$$

$$a + 8b = 18$$

$$U_{0} = a + 8b = 18$$

Jadi, suku ke-9 barisan aritmetika tersebut adalah 18.

3.
$$U_1 = 4$$

$$U_5 = 324$$

$$U_1 + U_2 + U_3 + U_4 + U_5 = S_5 = \cdots$$

Alternatif penyelesaian:

$$U_5 = ar^4$$

$$324 = 4r^4$$

$$4r^4 = 324$$

$$r^4 = 81$$

$$r = 3$$

$$S_n = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1}$$

$$S_5 = \frac{4(3^5 - 1)}{3 - 1}$$

$$S_5 = \frac{4(243 - 1)}{2}$$

Jadi, panjang kayu semula adalah 484 cm.

4.
$$\frac{x+y}{xy} = 1$$
 $\frac{1}{x} + \frac{1}{xy} + \frac{1}{xy^2} + \dots$

 $S_5 = 2(242)$ $S_5 = 484$

Alternatif penyelesaian:

$$\frac{x+y}{xy} = 1$$
$$xy = x+y$$

Dari deret geometri tak hingga di atas, dapat diketahui bahwa:

$$a = \frac{1}{x} \quad r = \frac{1}{y}$$

$$S_{\infty} = \frac{a}{1 - r}$$

$$= \frac{\frac{1}{x}}{1 - \frac{1}{y}}$$

$$= \frac{\frac{1}{x}}{1 - \frac{1}{y}} \times \frac{xy}{xy}$$

$$= \frac{y}{xy - x}$$

$$= \frac{y}{(x + y) - x}$$

$$= \frac{y}{y}$$

$$= 1$$

Pengayaan

Pada bagian pengayaan, siswa diharapkan dapat melihat pengaruh terhadap suatu barisan geometri jika nilai rasio, suku pertama, dan jumlah banyak suku diubah-ubah. Sebelum menentukan barisan geometri sendiri, siswa dibentuk kelompok yang terdiri dari 4 orang siswa. Selanjutnya, siswa diberi kesempatan untuk membuat barisan geometri dengan aturan yang berbeda di tiap kelompok.

Contoh:

Kelompok 1:

tiap siswa anggota kelompok memilih suku pertama yang berbeda-beda, dengan rasio dan banyak suku sama.

Kelompok 2:

tiap siswa anggota kelompok memilih rasio yang berbeda-beda, dengan suku pertama dan banyak suku sama.

Kelompok 3:

tiap siswa anggota kelompok memilih banyak yang berbeda-beda, dengan suku pertama dan rasio sama.

Lalu, siswa diminta untuk membuka link aplikasi *GeoGebra* melalui komputer/laptop/ handphone untuk melihat tampilan grafik dari barisan yang mereka buat.

Alternatif jawaban.

a. Barisan geometri 1.

Suku pertama	2	
Rasio	2	
Banyak suku	6	
2, 4, 8, 16, 32, 64		

 Dari barisan yang telah kalian buat, ubahlah rasionya menjadi bilangan yang lebih besar, sajikan barisan geometri yang baru pada tabel di bawah ini.
 Barisan geometri 2.

Suku pertama	2
Rasio	3
Banyak suku	6
2 , 6 , 18 , 54	, 162 , 486



Apa yang terjadi pada suku-suku pada barisan tersebut setelah diubah nilai rasionya? Jelaskan.

Alternatif jawaban:

Jika rasionya diubah dengan bilangan yang nilainya lebih dari sebelumnya, maka suku-suku pada barisan tersebut akan semakin besar. Sebailknya, jika rasio diubah dengan bilangan yang nilainya kurang dari sebelumnya, maka suku-suku pada barisan tersebut akan semakin kecil.

c. Prediksilah, bagaimana suku-suku pada barisan tersebut jika rasionya diganti dengan $\frac{1}{2}$ dari rasio pada barisan geometri pertama.

Alternatif jawaban:

Karena $r=\frac{1}{2}$ berarti rasio kurang dari rasio sebelum, maka suku-suku pada barisan tersebut akan semakin kecil.