

Kementerian Pendidikan, Kebudayaan, Riset, dan Teknologi
Republik Indonesia, 2021

Buku Panduan Guru Matematika untuk SMA/SMK Kelas X

Penulis: Dicky Susanto, dkk

ISBN: 978-602-244-537-1

Bab

3

Panduan Khusus

Vektor dan Operasinya

Pengalaman Belajar

Setelah mempelajari bab ini, siswa diharapkan dapat:

1. menyatakan vektor dalam berbagai representasi;
2. menunjukkan beberapa jenis vektor;
3. menyatakan vektor dalam komponen-komponen sistem koordinat;
4. melakukan operasi vektor serta menginterpretasi hasilnya secara geometris dan fisik; serta
5. menggunakan operasi vektor untuk menyelesaikan masalah kehidupan sehari-hari.

Bab Vektor dan Operasinya bertujuan mengembangkan kemampuan siswa untuk memahami dan bernalar mengenai vektor dan operasinya. Selain itu, siswa dapat menggambar vektor dan operasinya baik secara manual maupun dengan menggunakan teknologi. Siswa akan merepresentasikan vektor secara grafis dan memberikan notasinya. Siswa akan memahami vektor negatif atau vektor lawan dengan baik jika sudah memahami konsep vektor dengan benar. Mereka akan melihat bagaimana sistem koordinat Kartesius memudahkan dalam menentukan besar dan arah vektor, yang selanjutnya sangat berguna dalam melakukan operasi vektor. Tiga operasi vektor yang dibahas dalam bab ini adalah penjumlahan vektor, pengurangan vektor, dan perkalian skalar dengan vektor. Selain melibatkan komponen-komponen vektor, penjumlahan dan pengurangan vektor dapat juga dilakukan dengan metode segitiga, metode jajar genjang dan metode poligon.

Pada subbab A, siswa melakukan eksplorasi untuk memahami konsep vektor. Pada subbab B, siswa melakukan eksplorasi untuk menunjukkan vektor dalam sistem koordinat Kartesius. Pada subbab C siswa melakukan operasi vektor dengan beberapa cara.

Pemahaman vektor dan operasinya dalam bab ini berkaitan dengan bab Trigonometri di mana komponen-komponen vektor dapat berkaitan dengan sinus dan cosinus. Vektor dan operasinya terutama digunakan dalam bidang mekanika (mata pelajaran fisika) untuk menentukan resultan gerak dan gaya suatu benda. Contohnya, pengaruh gerak angin pada gerak pesawat dan besar gaya total yang bekerja pada sebuah pesawat.

Skema Pembelajaran

Subbab	Waktu (JP)*	Tujuan	Pokok Materi	Kosakata	Bentuk Metode dan Aktivitas	Sumber Utama	Sumber Lain
A. Notasi dan Jenis Vektor	4	<ul style="list-style-type: none"> Menyatakan vektor dalam berbagai representasi Menunjukkan jenis-jenis vektor 	<ul style="list-style-type: none"> Notasi Jenis vektor 	<ul style="list-style-type: none"> Vektor lawan Vektor ekuivalen Vektor berkebalikan 	Pembelajaran penemuan	Buku Siswa	
B. Vektor dan Sistem Koordinat	4	Menyatakan vektor dalam komponen-komponen sistem koordinat	Komponen-komponen vektor	<ul style="list-style-type: none"> Vektor satuan Vektor posisi 	Pembelajaran Penemuan	Buku Siswa	
C. Operasi Vektor	8	<ul style="list-style-type: none"> Melakukan operasi vektor serta menginterpretasi hasilnya secara geometris dan fisik Menggunakan operasi vektor untuk menyelesaikan masalah kehidupan sehari-hari 	<ul style="list-style-type: none"> Penjumlahan vektor Pengurangan vektor Perkalian skalar dengan vektor 	Resultan	Pembelajaran Penemuan	Buku Siswa	

Catatan:

* Waktu merupakan saran rentang jam pelajaran. Guru dapat menyesuaikan dengan kondisi aktual pembelajaran.

Panduan Pembelajaran

A. Notasi, dan Jenis Vektor



Pengalaman Belajar

- Menyatakan vektor dalam berbagai representasi
- Menunjukkan jenis-jenis vektor



Sarana & Prasarana Pembelajaran

- Busur
- Penggaris



Apersepsi

Perkenalkan bab ini dengan PEMBUKA BAB dan tanyakan kepada siswa apakah mereka sering memperhatikan petunjuk arah dan jarak untuk mencapai suatu lokasi. Setelah itu, sampaikan tiga pertanyaan pemantik dan beri tahu siswa bahwa mereka akan memikirkan dan mencoba mendapatkan jawaban terhadap ketiga pertanyaan ini selama pembelajaran bab mengenai vektor dan operasinya.

Gunakan bagian MENGINGAT KEMBALI mengenai sistem koordinat Kartesius yang sudah dipelajari di SMP. Pertanyaan-pertanyaan ini dapat digunakan untuk mengaktifkan prapengetahuan siswa:

- Apa peran titik O dalam sistem koordinat Kartesius?
- Bagaimana menyatakan arah dalam sistem koordinat Kartesius?
- Bagaimana menyatakan koordinat suatu titik dalam sistem koordinat Kartesius?

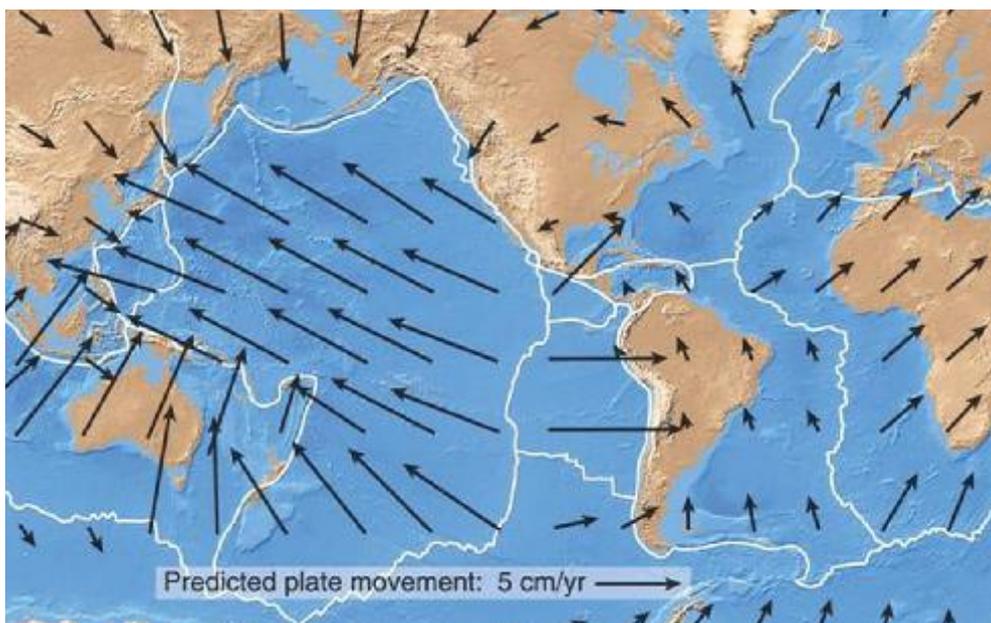


Pemanasan

Mulai aktivitas pembelajaran dengan meminta siswa menceritakan pengalaman dalam menggunakan papan petunjuk suatu lokasi. Buat diskusi singkat tentang pentingnya petunjuk arah dan jarak untuk mencapai suatu lokasi dan meminta siswa

memikirkan petunjuk arah dan jarak di udara dan laut. Pancing siswa untuk berpikir dengan menanyakan, besaran apa lagi yang mempunyai arah, contohnya kecepatan dan gaya. Kemudian minta siswa melakukan Eksplorasi dalam PERMASALAHAN PEMBUKA dengan menggunakan busur dan penggaris untuk menentukan gerak lempeng bumi yang melalui Indonesia. Siswa dapat melakukan eksplorasi secara individu terlebih dahulu kemudian diskusi secara berpasangan atau dalam kelompok, atau langsung bekerja sama berpasangan atau di dalam kelompok. Pastikan siswa untuk mengamati gambar dengan teliti dan memahami arti anak panah dalam peta.

Dari eksplorasi siswa dapat membedakan anak panah terpanjang, anak panah terpendek, dan anak panah yang sama atau ekuivalen.



Gambar 3.1 Prediksi Kecepatan Lempeng Bumi

Sumber: <https://spotlight.unavco.org/how-gps-works/gps-and-tectonics/gps-and-tectonics.html>,

Siswa perlu menentukan tiga anak panah berbeda yang melalui Indonesia. Ketiganya menunjukkan gerak lempeng yang berbeda.

Pastikan kerjaan siswa ketika mereka mengonversi panjang untuk mendapatkan besar kecepatan gerak lempeng. Perhatikan patokan anak panah dalam peta yang panjangnya menunjukkan 5 cm per tahun

Tabel 3.1 Besar dan Arah Kecepatan Lempeng Bumi

Anak Panah	Arah ($^{\circ}$)	Panjang (cm)	Perbandingan Panjang	Kecepatan gerak (cm/tahun)
Pertama	60		1,6	8
Kedua	315		1	1,6
Ketiga	55		1,6	8

Pastikan siswa dapat mengukur sudut dengan benar termasuk sudut-sudut yang lebih besar dari 90° .



Ayo Berdiskusi

Manfaat menggambar gerak lempeng dengan anak panah pada peta adalah memudahkan untuk membaca datanya, berapa cepat dan ke mana arah gerak. Karenanya, para ilmuwan dapat memperkirakan pertemuan lempeng-lempeng yang akan terjadi lebih dahulu.

Pada bagian eksplorasi, biarkan siswa mencoba dan tidak dituntut pasti mendapatkan jawabannya. Tujuannya adalah supaya mereka memahami apa yang dimaksud dengan vektor dan kegunaannya dalam kehidupan sehari-hari.



Metode & Aktivitas Pembelajaran

Kaitkan hasil eksplorasi siswa dengan PENJELASAN KONSEP dan tampilkan contoh-contoh notasi vektor. Khususnya, arahkan perhatian siswa pada pengertian vektor sebagai ruas garis berarah. Minta siswa menghubungkan pengertian vektor sebagai ruas garis berarah dengan eksplorasi yang mereka lakukan. Diskusikan lagi jika masih ada yang masih belum jelas atau membingungkan siswa. Uji pemahaman mereka dengan menjawab soal Ayo Berpikir Kritis.



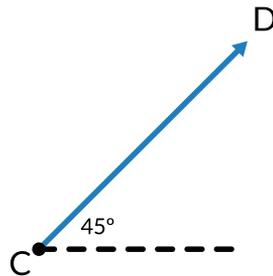
Ayo Berpikir Kritis

Bentuk-bentuk ini bukan merupakan vektor.



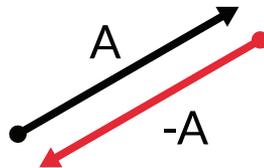
1. Bentuk pertama karena garisnya lengkung
2. Bentuk kedua karena garisnya mempunyai dua arah
3. Bentuk ketiga karena garisnya terdiri atas lebih dari satu garis lurus

Jelaskan kembali menyatakan besar dan arah vektor dengan merujuk pada Gambar 3.7.



Diskusikan contoh-contoh vektor dengan besar dan arah dalam kehidupan sehari-hari, misalnya mobil bergerak ke selatan dengan kelajuan 60 km/jam, gaya gravitasi 10 N dan arahnya ke bawah.

Vektor lawan dapat dijelaskan dengan membuat peragaan, misalnya berjalan dari titik asal ke suatu titik kemudian kembali ke titik asal. Perjalanan memerlukan dua vektor untuk menggambarkannya. Kedua vektor tersebut sama besar tetapi berlawanan arah, lihat Gambar 3.8.



Uji pemahaman mereka dengan menjawab soal Ayo Berpikir Kritis.

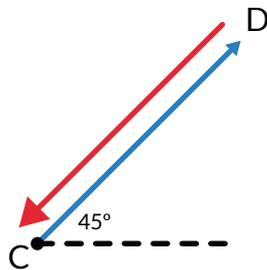


Ayo Berpikir Kritis



Vektor A bukan merupakan vektor lawan dari B karena arahnya tidak berlawanan dengan vektor B.

Vektor lawan dari CD, digambarkan sebagai berikut



Sudut antara vektor CD dan DC adalah 180° tetapi sudut dari DC adalah 225° .

Jelaskan kembali pengertian vektor ekuivalen dengan memberikan contoh dalam kehidupan sehari-hari. Misalkan kecepatan jatuhnya hujan sama pada lokasi yang berbeda.

Mintalah siswa mengerjakan Latihan untuk memeriksa pemahaman mereka. Mereka perlu terbiasa untuk menggambar arah vektor, khususnya sudut yang dibentuk vektor dengan arah horizontal. Mereka juga dapat menentukan besar sudut sesuai dengan arah mata angin.



Diferensiasi

Bagi siswa yang mengalami kesulitan, khususnya dalam mengukur sudut, minta siswa memastikan garis horizontal harus berimpit dengan garis 0 pada busur.

Bagi siswa dengan kecepatan belajar tinggi (*advanced*), minta mereka membuat pertanyaan-pertanyaan tambahan untuk dijawab baik sendiri maupun dari teman dengan kecepatan belajar tinggi. Minta mereka juga mencatat jika ada pertanyaan yang tidak dapat mereka jawab dengan informasi yang ada.

Kunci Jawaban Latihan 3.1



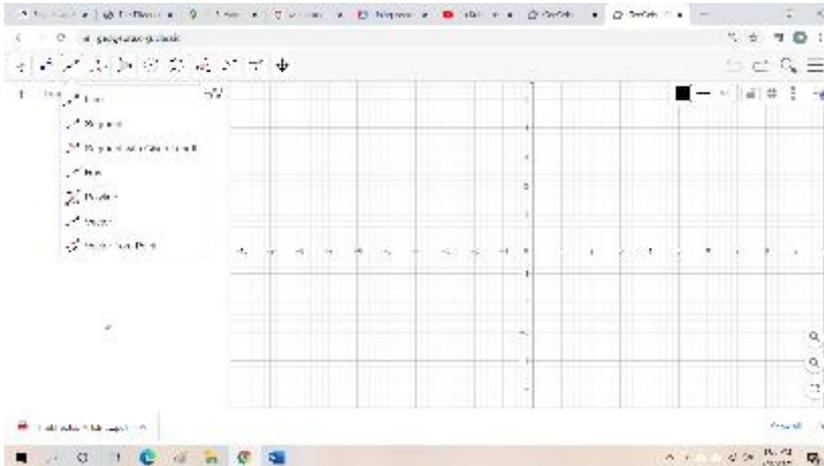
Ayo Menggunakan Teknologi

Siswa-siswa dapat menggunakan *Microsoft Word* atau *GeoGebra* untuk menggambar vektor.

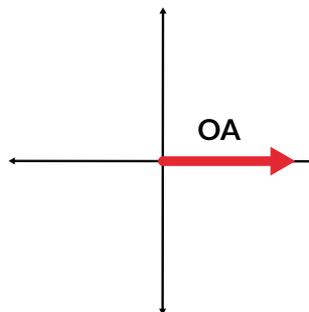
Microsoft Word

Pilih *Insert* kemudian *shapes* dan klik gambar anak panah. Klik *Outline shape* untuk mengatur warna dan tebal garis.

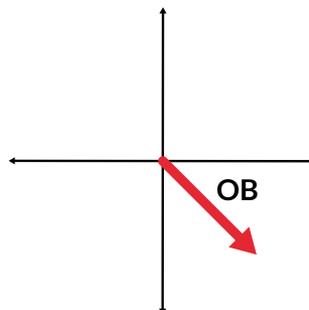
GeoGebra Classic



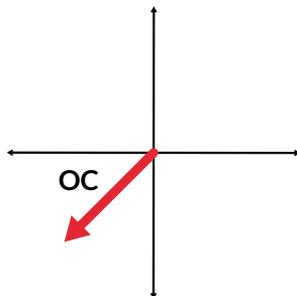
1. Vektor **OA**. Skala 1 cm mewakili 20 km/jam.



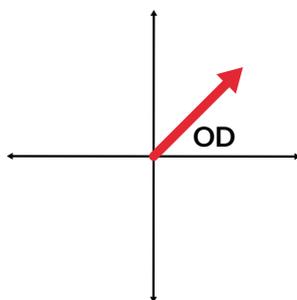
2. Vektor **OB**. Skala 1 cm mewakili 20 km/jam.



3. Vektor **OC**. Skala 1 cm mewakili 20 km/jam.

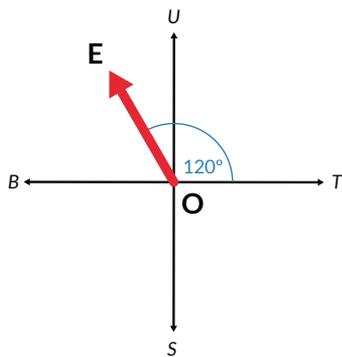


4. Vektor **OD** membentuk sudut 45° dengan sumbu x positif. Skala 1 cm mewakili 20 km/jam.

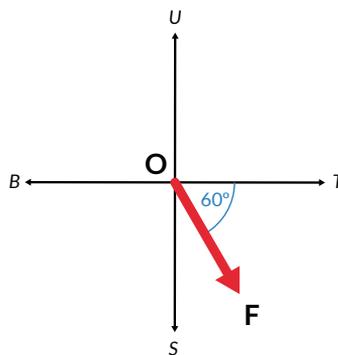
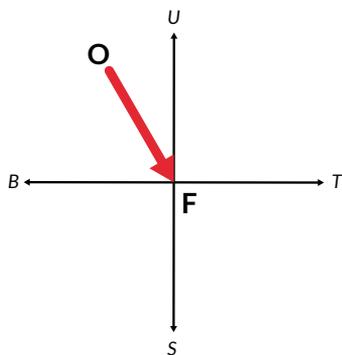


5. Skala 1 cm mewakili 200 km/jam. Vektor **OE** membentuk sudut 120° dan -60°

a.



b.

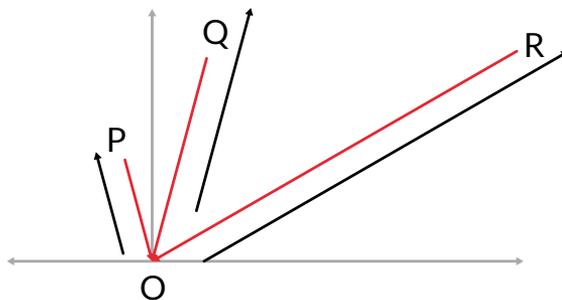


Kunci Jawaban Latihan 3.2

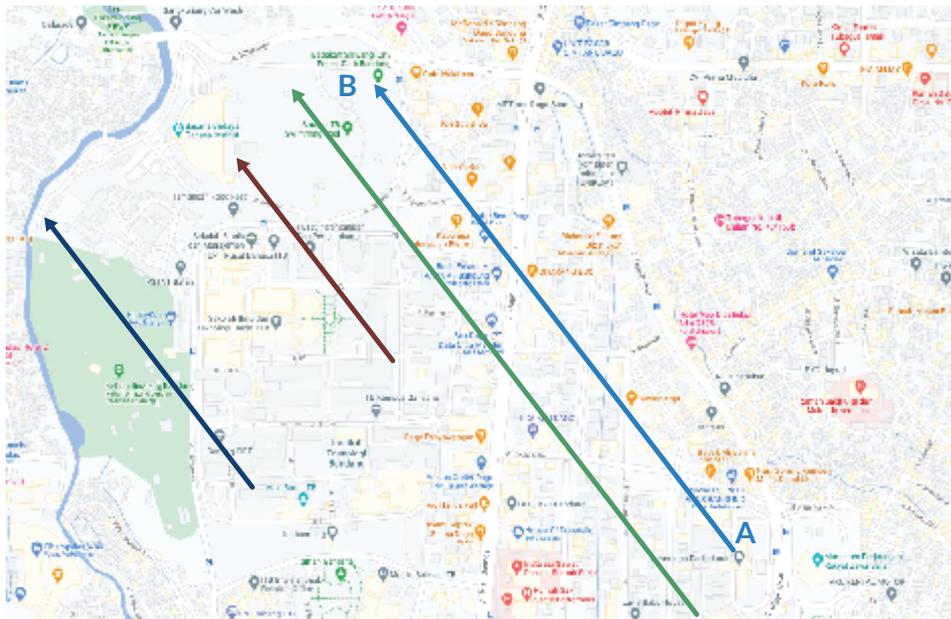
1. Nilai dan arah vektor

Vektor	Nilai Vektor	Arah Vektor
OP	200 N	120°
OQ	400 N	70°
OR	800 N	25°

2. Vektor lawan atau vektor negatif dari OP, OQ, dan OR.



3. Peta Kota Bandung



- Jarak langsung sekitar 1,05 km. Skala adalah 1 cm mewakili 0,35 km.
- Vektor yang lebih besar nilainya daripada vektor \mathbf{AB} adalah vektor berwarna hijau
- Vektor yang lebih kecil nilainya daripada vektor \mathbf{AB} adalah vektor berwarna coklat
- Vektor yang ekuivalen dengan vektor \mathbf{AB} adalah vektor berwarna biru tua

Catatan:

Siswa perlu memahami bagaimana menggeser garis agar sejajar dengan garis lainnya sehingga dapat membuat vektor yang sejajar dengan vektor lainnya. Bisa gunakan aplikasi *Microsoft Word* untuk menggambar vektor-vektor tersebut jika siswa langsung mengambil dari *google map*.

4.



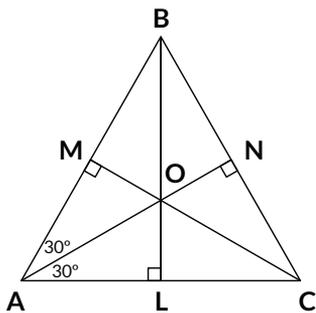
Ayo Berpikir Kritis

Vektor kecepatan pesawat kecil sama atau ekuivalen dengan pesawat besar karena jarak dan arah di antara keduanya harus tetap. Jika nilai vektor berbeda, maka posisi antara keduanya makin lama makin jauh. Jika arah berbeda maka proses pengisian tidak bisa terjadi.

5.



Ayo Berpikir Kreatif



Vektor-vektor yang ekuivalen adalah \mathbf{AM} dan \mathbf{MB} , \mathbf{CN} dan \mathbf{NB} serta \mathbf{AL} dan \mathbf{LC} .



Diferensiasi

Bagi siswa yang kecepatan belajarnya tinggi (*advanced*), minta mereka mengerjakan bagian Berpikir Kritis dan Berpikir Kreatif tanpa bantuan, dan minta mereka untuk memikirkan pertanyaan-pertanyaan yang dapat dikembangkan dari soal-soal yang mereka kerjakan. Pada saat yang sama, guru dapat mendampingi siswa yang mengalami kesulitan.



Ayo Berefleksi

Sebagai penutup dari pembelajaran subbab ini, ajak siswa untuk merefleksikan apa yang sudah mereka pelajari melalui empat pertanyaan berikut.

1. Apakah kalian dapat memberikan contoh-contoh vektor dalam kehidupan sehari-hari?

Sampel Jawaban: *Contoh-contoh vektor adalah posisi, perpindahan, kecepatan, dan gaya.*

2. Apakah kalian dapat menggambar vektor dan menyebutkan notasinya?

Sampel Jawaban: *Menggambar anak panah. Notasi dapat satu huruf atau dua huruf, dapat huruf tebal atau ada anak panah.*

3. Dapatkah kalian menentukan vektor-vektor ekuivalen?

Sampel Jawaban: *Vektor-vektor ekuivalen adalah vektor-vektor dengan panjang dan arah yang sama.*

4. Dapatkah kalian membuat vektor negatif atau vektor lawan dari suatu vektor?

Sampel Jawaban: *Vektor lawan adalah vektor dengan panjang dan arah yang berlawanan dari suatu vektor.*



Aktivitas ini dapat dilakukan secara bersamaan dengan melakukan *Think-Pair-Share*, yaitu meminta masing-masing siswa memikirkan jawaban pertanyaan refleksi tersebut, kemudian berpasangan saling membagikan jawaban, memodifikasi jawaban sesuai hasil berbagi dengan pasangan, dan kemudian menyampaikan di kelas. Guru

dapat melakukan penilaian formatif berdasarkan jawaban dari siswa sehingga dapat menekankan kembali konsep utama sesuai dengan tujuan pembelajaran, atau memperbaiki miskonsepsi yang masih dimiliki oleh siswa.

Aktivitas ini juga dapat dilakukan secara mandiri oleh individu siswa dengan menuliskan dalam jurnal refleksi mereka jika waktu yang tersedia singkat dan tidak memungkinkan untuk mengadakan diskusi bersama. Guru kemudian dapat mengumpulkan hasil refleksi dan memberikan umpan balik terhadap pemahaman masing-masing siswa.

B. Vektor dan Sistem Koordinat



Pengalaman Belajar

- Menyatakan vektor dalam berbagai representasi
- Menunjukkan jenis-jenis vektor
- Menyatakan vektor dalam komponen-komponennya berdasarkan sistem koordinat Kartesius



Sarana & Prasarana Pembelajaran

Penggaris, busur, dan kertas berpetak



Apersepsi

Mengingatkan siswa apa yang sudah dipelajari pada pertemuan sebelumnya mengenai notasi, vektor ekuivalen, dan vektor negatif. Uji pemahaman siswa bahwa vektor mempunyai titik pangkal dan titik ujung, hal ini menjadi dasar untuk memahami vektor dalam sistem koordinat Kartesius. Jika guru meminta siswa menuliskan refleksi di jurnal, maka guru dapat menekankan kembali hal-hal yang belum jelas dipahami oleh siswa sebagaimana tecermin dalam refleksi mereka.



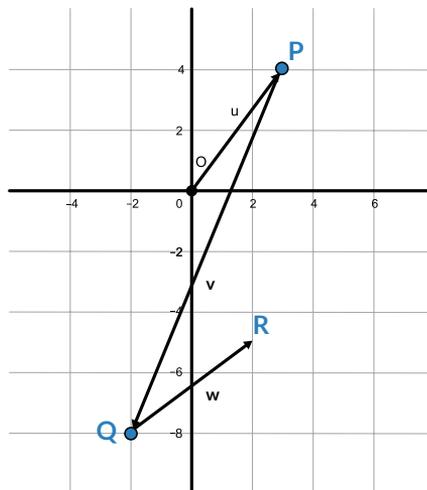
Pemanasan

Diskusikan peran koordinat dalam menentukan arah perjalanan, misalnya berkendara di jalan tol dapat singgah di tempat *rest area* terlebih dahulu. Setiap benda bergerak pasti berubah posisi atau lokasinya. Pilot pesawat terbang mengubah ketinggiannya atau rutenya agar perjalanan aman dan menyenangkan. Perubahan-perubahan ini pastinya berkaitan dengan koordinat lokasi, perlu ditanyakan dan dilaporkan ke menara pengawas. Minta para siswa mencari tahu cara kerja GPS (*Global Positioning System*).

Ceritakan beberapa hal tentang Rene Descartes yang menemukan sistem koordinat Kartesius dan minta siswa mencermati apa yang perlu dilakukan dalam eksplorasi.

Ingatkan siswa untuk mencatat pertanyaan-pertanyaan yang mungkin timbul selama eksplorasi. Siswa bekerja secara berpasangan untuk melakukan eksplorasi. Setelah siswa melakukan eksplorasi, diskusikan hasil-hasil eksplorasi dengan meminta dua kelompok mempresentasikan hasilnya. Kumpulkan pertanyaan-pertanyaan siswa dan diskusikan dalam kelas, Tanyakan, bagaimana menyatakan notasi vektor dalam sistem koordinat dan bagaimana arah dinyatakan dalam sistem koordinat Kartesius.

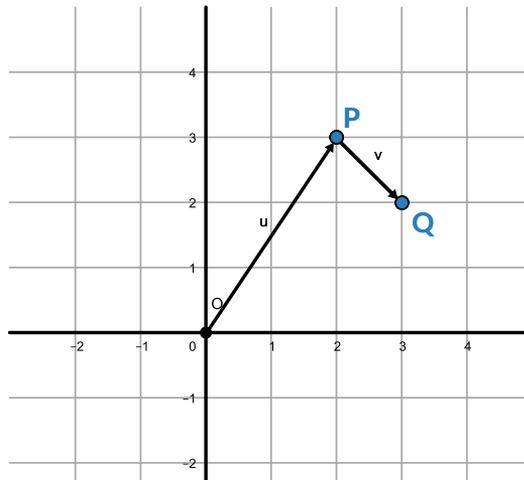
Jawaban Eksplorasi 3.2 no. 1 adalah sebagai berikut.



Tunjukkan bahwa dua titik diperlukan untuk membuat satu vektor. Vektor \overrightarrow{OP} dapat dinyatakan dalam $(3 \ 4)$. Ingatkan, bahwa tidak ada tanda koma dalam penulisan karena penulisan menunjukkan vektor baris. Jelaskan bahwa selain vektor

baris ada juga penulisan dalam vektor kolom. Kedua hal ini akan dibahas lebih detil. Bangkitkan rasa ingin tahu dengan bertanya, bagaimana penulisan vektor baris dari PQ dan QR .

Jawaban Eksplorasi 3.2 no. 2 adalah sebagai berikut.



Ayo Berpikir Kritis

1. Vektor berbeda dengan titik koordinat. Vektor memerlukan dua titik koordinat.
2. Pemilihan titik asal pada sistem koordinat tidak memengaruhi besar dan arah vektor karena vektor ditentukan oleh dua titik. Jika titik pangkal berubah, maka titik ujung juga berubah.

Pada penjelasan konsep dan contoh-contoh dijelaskan perbedaan sistem koordinat Kartesius berdimensi dua dengan berdimensi tiga dan konsep-konsep lainnya. Minta siswa memberikan contoh gerak benda yang memerlukan sistem koordinat Kartesius dua dimensi dan tiga dimensi. Contoh, gerak mobil di jalan raya untuk sistem koordinat Kartesius dua dimensi. Buat diskusi bagaimana teknologi digunakan dalam aplikasi untuk menentukan lokasi berdasarkan sistem koordinat Kartesius.

Gerak pesawat terbang dapat merujuk pada sistem koordinat Kartesius dua dimensi dan tiga dimensi. Ketika pesawat terbang berada di landasan pacu, yang digunakan adalah sistem koordinat Kartesius dua dimensi. Begitu pesawat mengudara, yang digunakan adalah sistem koordinat Kartesius tiga dimensi.



Ayo Berdiskusi

Aplikasi perjalanan dibuat dengan sistem koordinat Kartesius untuk menunjukkan rute yang dapat berubah setiap saat karena situasi lalu lintas yang selalu berubah.

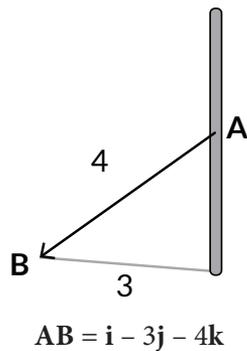
Fokuskan terlebih dahulu pada pemahaman vektor satuan dalam sistem koordinat dua dimensi dan tiga dimensi. Untuk sistem koordinat berdimensi tiga dapat menggunakan sistem tiga jari yang ada dalam Gambar 3.17. Setiap vektor dinyatakan dalam komponen-komponen menurut arahnya, dapat berupa vektor kolom atau vektor baris. Tanyakan apa arti penulisan \mathbf{OP} $(3\ 4)$. Berjalan 3 ke timur kemudian 4 ke utara. Jelaskan bahwa 3 dan 4 adalah komponen-komponen vektor. Minta siswa menyatakan komponen-komponen vektor \mathbf{PQ} dan \mathbf{QR} dan menjelaskan bagaimana cara mendapatkannya. Dari \mathbf{P} ke \mathbf{Q} berjalan 5 ke barat dan 12 ke selatan maka vektor \mathbf{PQ} dituliskan $(5\ 12)$ atau $\begin{pmatrix} 5 \\ 12 \end{pmatrix}$. Dari \mathbf{Q} ke \mathbf{R} berjalan 4 ke timur dan 3 ke utara maka vektor \mathbf{QR} dituliskan $(3\ 4)$ atau $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Tunjukkan vektor-vektor yang ekuivalen dalam sistem koordinat, penulisan vektor baris dan kolom dari \mathbf{u} dan \mathbf{v} adalah $(3\ 4)$ atau $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$. Panjang vektor ditentukan berdasarkan teorema Pythagoras dengan menarik akar dari penjumlahan kuadrat komponen.

Ingatkan bahwa setiap vektor sembarang dapat ditentukan vektor satuannya sehingga memudahkan untuk mengetahui arah vektor. Tanyakan, mengapa vektor satuan dari suatu perjalanan menjadi penting. Tunjukkan cara mendapatkan vektor posisi dan tanyakan mengapa peran vektor posisi penting. Jelaskan juga vektor berkebalikan dan manfaatnya.

Salah satu manfaat dari vektor satuan adalah mengetahui komponen-komponen dari vektor-vektor yang bukan vektor posisi atau vektor perpindahan seperti vektor gaya. Jelaskan contoh di bawah ini.

Yang diketahui adalah vektor posisi, tetapi dengan vektor satuan dapat diketahui komponen-komponen vektor gaya.



Ayo Berdiskusi

Vektor-vektor ekuivalen tidak bergantung pada letaknya karena vektor adalah besaran yang mempunyai nilai dan arah.

Berikan beberapa contoh soal yang lain untuk menunjang pemahaman vektor satuan dan vektor posisi, sekaligus vektor-vektor yang ekuivalen. Jelaskan, jika ada beberapa pesawat yang punya kecepatan sama di udara, maka jalur lintasan akan aman dari tabrakan.

Pastikan siswa sudah memahami vektor dalam sistem koordinat karena akan mendukung pemahaman operasi vektor.

Perluasan pembahasan

Jelaskan ada beberapa sistem koordinat sesuai dengan tujuannya. Contoh sistem koordinat bola dan sistem koordinat silinder. Kedua sistem koordinat ini digunakan untuk benda yang bergerak dalam lintasan berbentuk lengkung. Vektor satuan dalam kedua sistem koordinat ini tidak tetap, berbeda dengan sistem koordinat Kartesius.

Mintalah siswa mengerjakan Latihan untuk memeriksa pemahaman mereka. Mereka perlu terbiasa dengan sistem koordinat Kartesius untuk menggambar dan menganalisis vektor termasuk konsep vektor satuan dan vektor posisi.

Kunci Jawaban Latihan 3.3



Ayo Menggunakan Teknologi

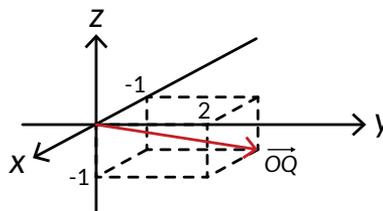
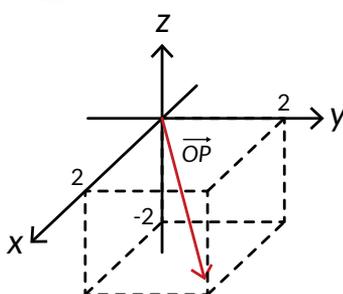
Siswa-siswa dapat menggunakan *Microsoft Word* atau *GeoGebra* untuk menggambar vektor dalam sistem koordinat Kartesius.

1. $\mathbf{a} = a_1 \mathbf{i} + a_2 \mathbf{j}$
 $\mathbf{OP} = a \mathbf{i} + b \mathbf{j} + c \mathbf{k}$

2.



Ayo Berpikir Kreatif



3. Vektor satuan $\mathbf{OP} = (2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 2\mathbf{k})/\sqrt{12} = (\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k})/\sqrt{3}$

Vektor satuan $\mathbf{OQ} = (-\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k})/\sqrt{6}$

4. $\mathbf{AB} (-5 \ -4)$ atau $\begin{pmatrix} -5 \\ -4 \end{pmatrix}$

$\mathbf{CD} (7 \ -3)$ atau $\begin{pmatrix} 7 \\ -3 \end{pmatrix}$

$\mathbf{EF} (6 \ 1)$ atau $\begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\mathbf{GH} (-4 \ 2)$ atau $\begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix}$

Kunci Jawaban Latihan 3.4



Ayo Berpikir Kritis

1. Peran vektor dan sistem koordinat dalam mengatur lalu lintas penerbangan sangat penting karena memberikan informasi tentang kedudukan pesawat setiap saat berdasarkan pergerakan pesawat.
2. Perpindahan $\mathbf{OP} = 20 \mathbf{i} + 8 \mathbf{j}$
3. Siswa menggunakan ubin di rumah sebagai sistem koordinat dan menentukan perpindahan dari satu lokasi ke lokasi lain dengan menyatakan notasinya.
4. Kecepatan tidak dapat dinyatakan sebagai titik dalam sistem koordinat secara langsung karena sistem koordinat mengatur tentang posisi. Vektor satuan tetap dapat digunakan untuk menunjukkan arah vektor kecepatan.



Ayo Berefleksi

1. Apakah kalian dapat menunjukkan komponen-komponen suatu vektor dan menentukan panjangnya?

Sampel Jawaban: Siswa memberikan contoh-contoh vektor, menyatakan komponen-komponennya, dan menghitung panjangnya.

Saran: Lebih baik kalau siswa bertukar soal dengan temannya.

2. Bagaimana menyatakan komponen-komponen dalam vektor kolom dan vektor baris?

Sampel Jawaban: Siswa dapat menggunakan soal nomor 1 untuk menjawabnya.

3. Apa perbedaan vektor posisi, vektor kolom, dan vektor berkebalikan?

Sampel Jawaban: Setiap vektor dapat dinyatakan dalam vektor kolom atau vektor baris. Vektor posisi adalah vektor yang titik pangkalnya merupakan titik O .

C. Operasi Vektor



Pengalaman Belajar

- Melakukan operasi vektor serta menginterpretasikan hasilnya secara geometris dan fisis.
- Menggunakan operasi vektor untuk menyelesaikan masalah dalam kehidupan sehari-hari.



Sarana & Prasarana Pembelajaran

Penggaris, busur, dan kertas berpetak



Apersepsi

Mengingatkan siswa apa yang sudah dipelajari pada pertemuan sebelumnya mengenai vektor dan sistem koordinat. Uji pemahaman siswa dengan memberikan pertanyaan, misalkan memberikan beberapa titik A , B , C , dan D . Tanyakan vektor baris atau kolom dari \overline{AB} , \overline{CB} , dan \overline{DA} serta cara mendapatkannya. Jika guru meminta siswa

menuliskan refleksi di jurnal, maka guru dapat menekankan kembali hal-hal yang belum jelas bagi siswa sebagaimana yang ada dalam refleksi mereka.

1. Penjumlahan Vektor



Diskusikan bagaimana menentukan rute dari suatu lokasi ke lokasi yang lain dengan menggunakan kendaraan atau berjalan kaki. Tanyakan, apakah dapat langsung saja menyusuri lintasan seperti vektor dari titik pangkal ke titik ujung atau apakah mungkin mempunyai rute yang berbeda? Diskusikan juga aplikasi rute yang kadang memberikan rute lebih panjang tetapi dengan waktu tempuh lebih pendek.

Setelah diskusi, siswa kerja secara berpasangan untuk melakukan eksplorasi. Siswa dapat menggunakan *Microsoft Word* untuk menggambar vektor pada peta. Setelah siswa-siswa melakukan eksplorasi, diskusikan hasil-hasil eksplorasi dengan meminta siswa mempresentasikan hasilnya. Tanyakan apakah ada yang memiliki rute yang berbeda dari presentasi temannya.

Jawaban Eksplorasi 3.3



Vektor **PB** diperoleh dari penjumlahan 10 vektor.

Hasil penjumlahan vektor disebut sebagai resultan vektor.

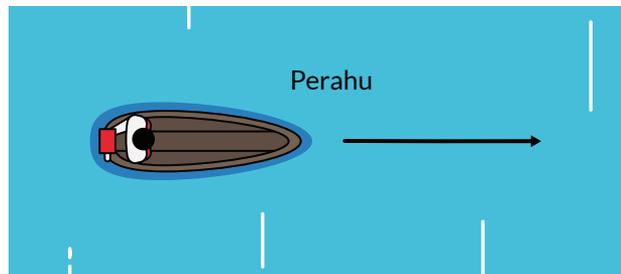
Jelaskan bahwa dalam situasi sehari-hari tidaklah banyak rute dari satu lokasi ke lokasi lain yang langsung seperti menggunakan satu vektor saja. Minta siswa mencermati hal-hal khusus dalam penjumlahan vektor.

Hal-hal khusus dalam penjumlahan vektor:

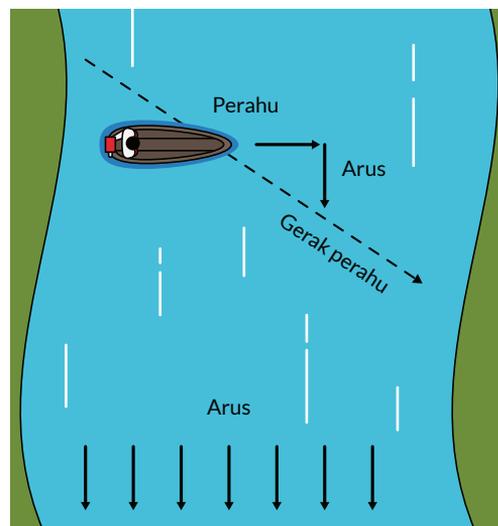
1. Titik pangkal vektor resultan adalah titik pangkal vektor awal dan titik ujung vektor resultan adalah titik ujung vektor akhir.
2. Titik ujung vektor sebelumnya selalu bertemu dengan titik pangkal vektor berikutnya.

Jawaban Eksplorasi 3.4

1. Jika kelajuan arus sungai nol maka gerak perahu tidak berubah.



2. Jika kelajuan arus sungai tidak nol maka gerak perahu berubah, baik arah maupun kelajuannya.

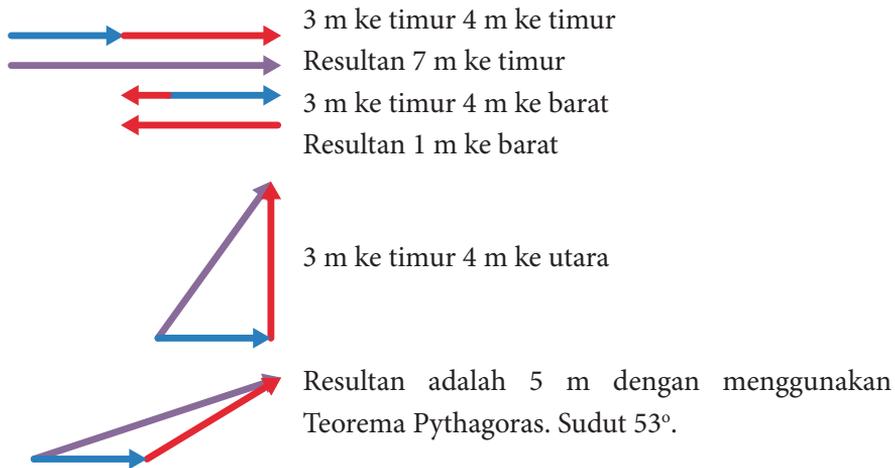


Jika diketahui kelajuan perahu dan kelajuan arah sungai, berapa kelajuan perahu akibat arus sungai? Bagaimana cara menentukannya?

Diskusikan contoh-contoh dalam kehidupan sehari-hari seperti contoh eksplorasi. Contoh sederhana, bagaimana gerak sepeda jika angin mendorong sepeda dari belakang ke depan atau sebaliknya?

Untuk mendapat gambaran lebih jelas tunjukkan perbedaan penjumlahan skalar dengan penjumlahan vektor. Jelaskan bahwa 3 kg gula ditambah dengan 4 kg gula pasti menghasilkan 7 kg gula. Jika suhu awal 3°C kemudian bertambah 4°C maka suhu akhir pasti 7°C .

Bagaimana jika berpindah 3 m kemudian berpindah lagi 4 m? Perpindahan akhir sangat banyak kemungkinan. Beberapa contoh di bawah ini adalah.



Ayo Berpikir Kritis

Penjumlahan skalar hanya menghasilkan satu jawaban, sedangkan penjumlahan vektor menghasilkan berbagai jawaban karena vektor berkaitan dengan arah.

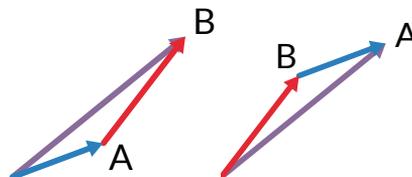
Pastikan siswa memahami penjumlahan vektor dengan metode segitiga dan sifat komutatif penjumlahan vektor dengan menggunakan metode segitiga.



Ayo Mencoba

Menunjukkan penjumlahan dua vektor bersifat komutatif dengan menggunakan metode segitiga.

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$$



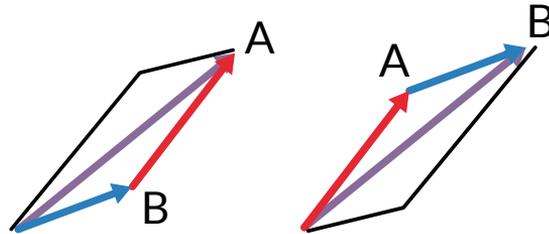
Pastikan siswa memahami penjumlahan vektor dengan metode jajar genjang.



Ayo Mencoba

Menunjukkan penjumlahan dua vektor bersifat komutatif dengan metode jajar genjang.

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$$

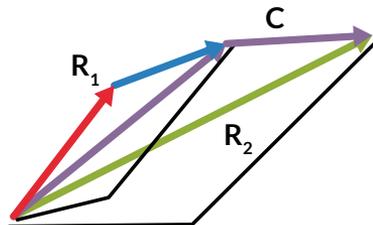


Pastikan siswa memahami penjumlahan vektor dengan metode jajar genjang.



Ayo Berpikir Kreatif

Jika ada tiga vektor, maka dua vektor dijumlahkan terlebih dahulu secara jajar genjang. Hasilnya R_1 . R_1 dijumlahkan lagi dengan vektor lain secara jajar genjang sehingga diperoleh R_2 .



Ayo Bekerja Sama

Pastikan setiap anggota kelompok terlibat.

Setelah kerja kelompok berikan kesempatan kepada setiap kelompok untuk mempresentasikan hasilnya.



Ayo Berefleksi

Tutup pembelajaran dengan meminta siswa melakukan refleksi terhadap apa yang sudah mereka pelajari dengan menjawab pertanyaan refleksi dan berpikir kreatif.

1. Apakah kalian dapat melakukan penjumlahan vektor secara grafis?

Sampel Jawaban: Siswa memberikan contoh-contoh penjumlahan vektor dengan metode segitiga, metode jajar genjang dan metode poligon.

2. Apakah kalian dapat melakukan penjumlahan vektor dengan menjumlahkan komponen-komponennya?

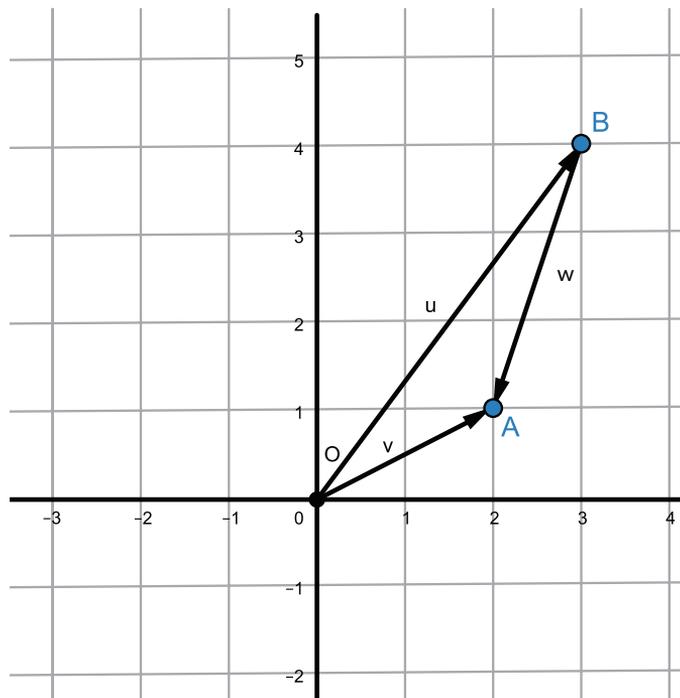
Sampel Jawaban: Siswa memberikan contoh-contoh pada (1) dengan menjumlahkan secara komponen.

2. Pengurangan Vektor



Pemanasan

Diskusikan kembali penjumlahan vektor. Bagaimana dengan pengurangan vektor? Minta siswa menyampaikan ide-idenya kemudian siswa mengerjakan eksplorasi.



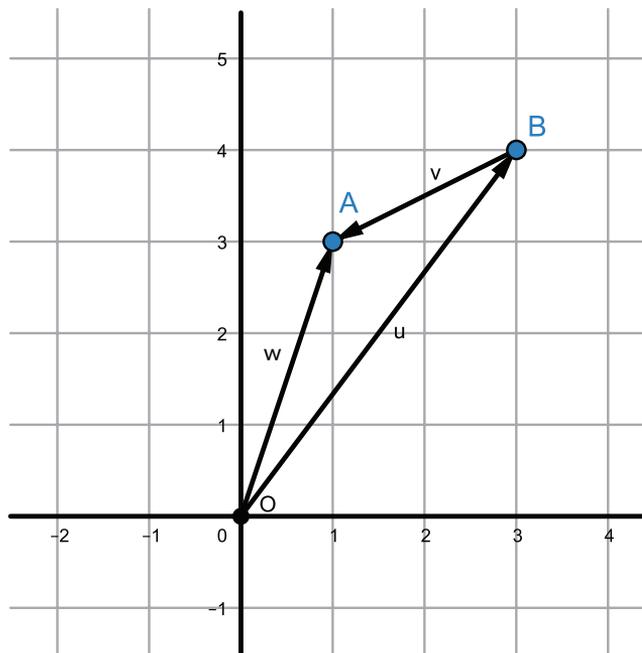
Siswa bekerja secara berpasangan untuk melakukan eksplorasi. Siswa dapat menggunakan *Microsoft Word* atau *GeoGebra* untuk menggambar vektor. Setelah siswa-siswa melakukan eksplorasi, diskusikan hasil-hasil eksplorasi dengan meminta siswa mempresentasikan hasilnya. Tanyakan, bagaimana menuliskan penjumlahan

kedua vektor dan hasilnya dengan meminta siswa memperhatikan $\mathbf{u} + \mathbf{w} = \mathbf{v}$. Setelah itu minta siswa melakukan pengurangan antara \mathbf{u} dan \mathbf{v} sehingga penulisan adalah sebagai berikut $\mathbf{u} - \mathbf{v} = -\mathbf{w}$,

Vektor baris dari \mathbf{w} adalah $(-1 \ -3)$ sedangkan vektor baris dari $-\mathbf{w}$ adalah $(1 \ 3)$. Secara komponen $(3 \ 4) - (2 \ 1) = (1 \ 3)$. Hasil pengurangan secara komponen sesuai dengan hasil secara grafis.

Minta siswa berpikir bagaimana menggambar kedua vektor jika diberikan $\mathbf{u} - \mathbf{v} = -\mathbf{w}$. Jelaskan bahwa pengurangan dua vektor lebih mudah dengan menggunakan penjumlahan.

Sesuai dengan eksplorasi maka $\mathbf{u} - \mathbf{v} = \mathbf{u} + (-\mathbf{v}) = -\mathbf{w}$



Ayo Berefleksi

Tutup pembelajaran dengan meminta siswa melakukan refleksi terhadap apa yang sudah mereka pelajari dengan menjawab pertanyaan refleksi dan berpikir kreatif.

1. Apakah kalian dapat melakukan pengurangan vektor secara grafis?

Sampel Jawaban: Siswa memberikan contoh-contoh pengurangan vektor dengan metode segitiga dan metode jajargenjang.

2. Apakah kalian dapat melakukan pengurangan vektor dengan mengurangi komponen-komponennya?

Sampel Jawaban: Siswa memberikan contoh-contoh pada (1) dengan mengurangi secara komponen.

3. Perkalian Skalar dengan Vektor



Pemanasan

Diskusikan kembali penjumlahan dan pengurangan vektor sebelum melakukan eksplorasi.

Setelah diskusi, siswa bekerja secara berpasangan untuk melakukan eksplorasi. Siswa dapat menggunakan Microsoft Word untuk menggambar vektor pada peta. Setelah siswa-siswa melakukan eksplorasi, diskusikan hasil-hasil eksplorasi dengan meminta siswa mempresentasikan hasilnya.

Jawaban Eksplorasi 3.6



Sumber: [shutterstock.com/Rainer Lesniewski](https://www.shutterstock.com/Rainer-Lesniewski)



Ayo Berdiskusi

1. Panjang **BR** = 3,4 cm.
Panjang **BU** = 2,2 cm = 0,65 **BR**.
Panjang **UR** = 1,2 cm = 0,35 **BR**
2. Ketiganya mempunyai arah yang sama.

Jelaskan perkalian skalar dengan vektor berdasarkan Gambar 3.36. Skalar dapat bernilai positif atau negatif, dapat juga bernilai lebih dari satu atau kurang dari satu.



Ayo Bekerja Sama

Setiap kelompok membuktikan perkalian skalar dengan vektor secara grafis (pada kertas berpetak) dan secara komponen memberikan hasil yang sama. Setiap kelompok menentukan satu vektor terlebih dahulu. Setiap anggota dapat memilih skalar yang diinginkan tetapi harus berbeda.



Ayo Berefleksi

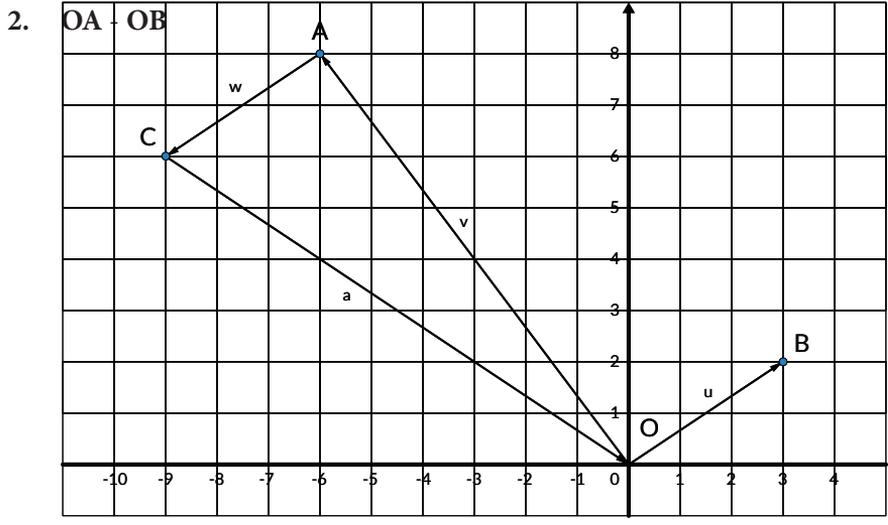
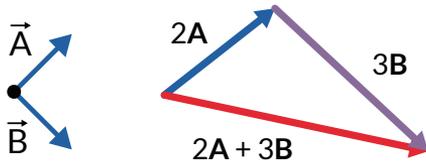
Tutup pembelajaran dengan meminta siswa melakukan refleksi terhadap apa yang sudah mereka pelajari dengan menjawab pertanyaan refleksi dan berpikir kreatif.

1. Apakah kalian dapat melakukan perkalian skalar dengan vektor secara grafis?
Sampel Jawaban: *Siswa memberikan contoh-contoh perkalian skalar dengan vektor secara grafis. Nilai skalar bervariasi.*
2. Apakah kalian dapat melakukan perkalian vektor dengan skalar secara komponen?
Sampel Jawaban: *Siswa memberikan contoh-contoh pada (1) dengan melakukannya secara komponen.*

Minta siswa mengerjakan Latihan dan perhatikan apakah siswa sudah dapat mengerjakannya.

Kunci Jawaban Latihan 3.5

1. $2A + 3B$

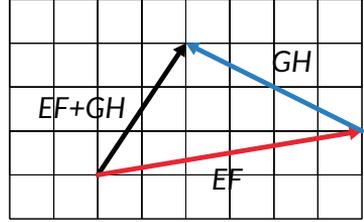


$$OA - OB = (-6 \ 8) - (3 \ 2) = (-9 \ 6)$$

Hasil secara komponen sesuai dengan hasil secara grafis yang ditunjukkan oleh vektor **a**.

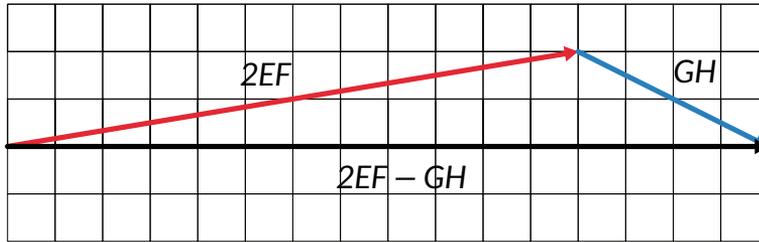
3. Menentukan resultan vektor

a. $\vec{EF} + \vec{GH} = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix}$
 $= \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$
 $|r| = \sqrt{2^2 + 3^2}$
 $= \sqrt{13}$



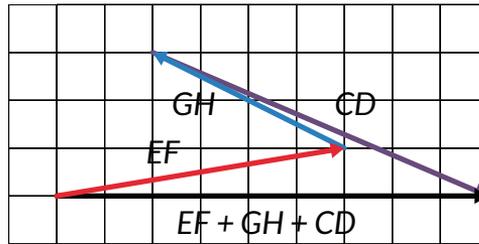
b. $2\vec{EF} - \vec{GH} = 2 \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix}$
 $= \begin{pmatrix} 12 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix}$
 $= \begin{pmatrix} 16 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$|r| = 16$$



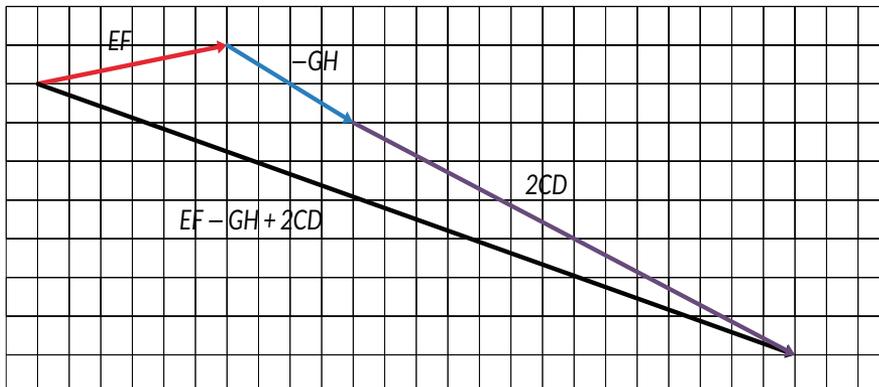
$$\begin{aligned} \text{c. } \vec{EF} + \vec{GH} + \vec{CD} &= \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 9 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$|r| = 9$$

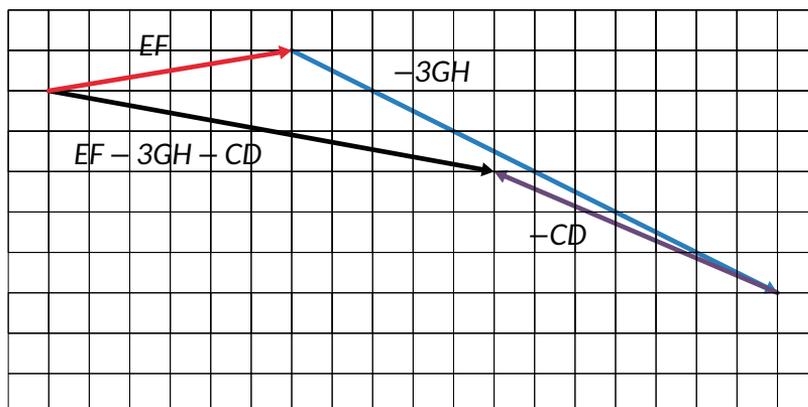


$$\begin{aligned} \text{d. } \vec{EF} - \vec{GH} + 2\vec{CD} &= \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 7 \\ -3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 24 \\ -7 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

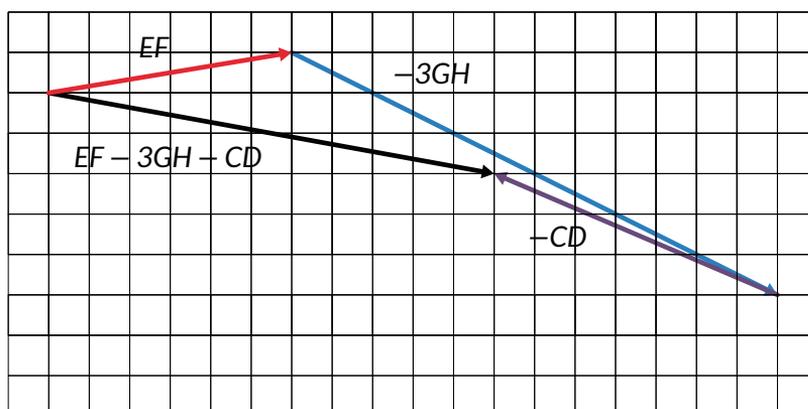
$$\begin{aligned} |r| &= \sqrt{24^2 + (-7)^2} \\ &= 25 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 \text{e. } \vec{EF} + \vec{GH} + \vec{CD} + \vec{AB} &= \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -5 \\ -4 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \end{pmatrix} \\
 |r| &= \sqrt{4^2 + (-4)^2} \\
 &= 4\sqrt{2}
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 \text{f. } \vec{EF} - 3\vec{GH} - \vec{CD} &= \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 11 \\ -2 \end{pmatrix} \\
 |r| &= \sqrt{11^2 + (-2)^2} \\
 &= \sqrt{125} \\
 &= 5\sqrt{5}
 \end{aligned}$$



4. Peta Papua



Resultan dari JW - JN



Kunci Jawaban Latihan 3.6

1. Menunjukkan sifat komutatif

$$\begin{aligned}\vec{a} + \vec{b} &= \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{b} + \vec{a} &= \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

2. Metode jajar genjang merupakan salah satu metode penjumlahan vektor karena sebenarnya jajar genjang mempunyai dua pasang sisi yang sejajar.
3. Misalkan A (-3, 2, -1), B (1, 5, -6) dan C (5, 8, -11)
Vektor baris dari AB adalah (4 3 -5) dan AC juga adalah (4 3 -5)
AB dan AC memiliki titik pangkal yang sama dan keduanya sejajar maka titik A, B, dan C segaris.

4. Resultan vektor $\sqrt{1.000.000 + 250.000} = \sqrt{1.250.000} = 500\sqrt{5}$
5. Siswa membuat 3 vektor sembarang **a**, **b**, dan **c** pada kertas berpetak. Gambarkan hasil $2\mathbf{a} + \mathbf{b} - 2\mathbf{c}$.

Refleksi

Pada akhir pembelajaran bab ini, mintalah kepada siswa untuk memikirkan kembali apa saja yang sudah mereka pelajari dengan menjawab pertanyaan-pertanyaan penuntun sebagai upaya guru untuk memastikan bahwa siswa sudah mencapai tujuan pembelajaran. Uji Kompetensi juga diberikan untuk mengukur ketercapaian tujuan pembelajaran dari bab ini.

Kunci Jawaban

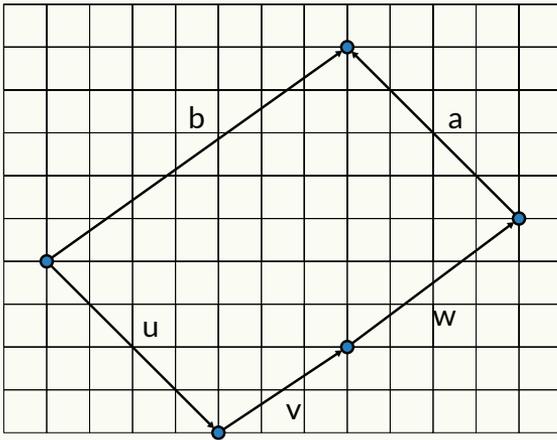
Uji Kompetensi

1. Vektor $\mathbf{AB} = (5 \ 0 \ 8) - (3 \ -6 \ 0) = (2 \ 6 \ 8)$

Panjang vektor

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} &= \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

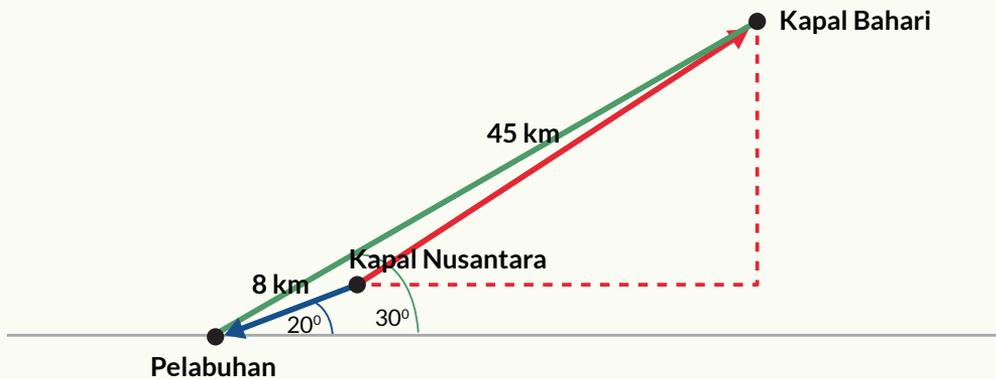
2. Penjumlahan dua vektor yang menghasilkan nol haruslah mempunyai besar yang sama tetapi arah yang berlawanan.
3. Penjumlahan tiga vektor yang besarnya berbeda dapat menghasilkan vektor nol
4. Arah gerak ke selatan dan kelajuan 1,6 m/s.
5. Resultan vektor.



Pengayaan

Kapal Bahari berada pada posisi 30° dan sejauh 45 km dari tempat kapal bersandar di pelabuhan. Kapal Nusantara menuju pelabuhan dengan sudut 20° dan berjarak 8 km dari tempat kapal bersandar. Gambarlah vektor perpindahan kapal Bahari terhadap Kapal Nusantara. Gunakan busur dan penggaris untuk menentukan sudut dan jaraknya.

Alternatif Penyelesaian :



Jarak tegak antar kedua kapal $\approx 19,8$ km

Jarak mendatar antar kedua kapal $\approx 31,5$ km

Panjang vektor yang terbentuk ≈ 37 km (Jarak antara kapal Bahari dan Nusantara)

Sudut vektor yang terbentuk terhadap garis horizontal $\approx 32^\circ$