

Kementerian Pendidikan, Kebudayaan, Riset, dan Teknologi
Republik Indonesia, 2021

Matematika untuk SMA/SMK Kelas X

Penulis: Dicky Susanto, dkk

ISBN: 978-602-244-526-5

Bab

2

Barisan dan Deret

Pengalaman Belajar

Setelah mempelajari bab ini, kalian diharapkan dapat:

1. mendeskripsikan perbedaan antara barisan aritmetika dan barisan geometri;
2. menentukan suku ke- n dan beda dari barisan aritmetika;
3. menentukan suku ke- n dan rasio dari barisan geometri;
4. menyelesaikan permasalahan kehidupan sehari-hari yang berkaitan dengan konsep barisan aritmetika dan barisan geometri;
5. menentukan jumlah suku ke- n dari deret aritmetika dan deret geometri;
6. menyelesaikan permasalahan kehidupan sehari-hari yang berkaitan dengan konsep deret aritmetika dan deret geometri;
7. menentukan jumlah suku dari deret geometri tak hingga;
8. menyelesaikan permasalahan kehidupan sehari-hari yang berkaitan dengan konsep deret geometri tak hingga.

Barisan dan deret sangat erat kaitannya dengan konsep pola bilangan yang telah kalian pelajari pada tingkat SMP. Penerapan barisan dan deret sangat mudah ditemui dalam kehidupan sehari-hari.

Seperti yang ada di halaman bab pembuka, konsep barisan dan deret terkait dengan menghitung susunan kursi dengan banyaknya kursi yang berbeda di tiap barisnya. Kalian dapat menentukan banyak objek yang disusun dengan pola piramida di mana objek tersebut dapat bertambah atau berkurang secara konstan. Kalian juga dapat menentukan panjang lintasan dari bola yang dipantulkan.

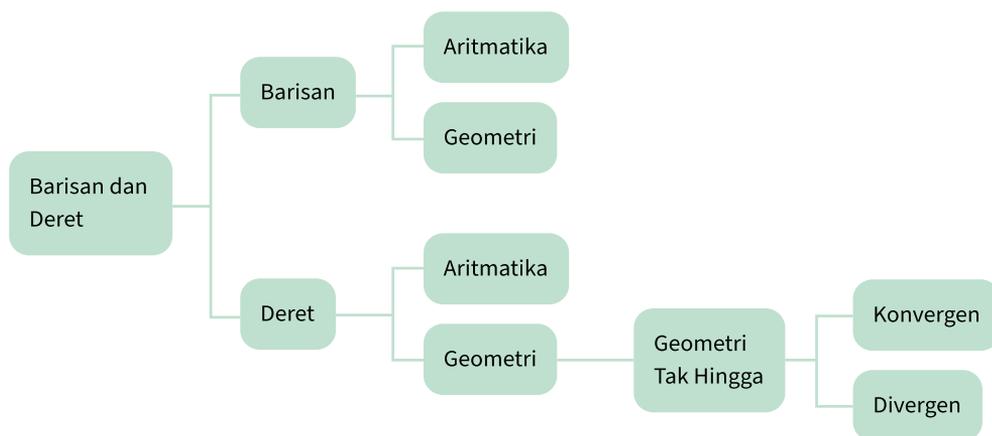
Pertanyaan Pemantik

1. Apakah barisan bilangan merupakan barisan aritmetika atau barisan geometri?
2. Apa perbedaan barisan dan deret?
3. Bagaimana menentukan suku $ke-n$ dari suatu barisan?
4. Bagaimana menentukan rumus U_n dari suatu bilangan?
5. Apakah perbedaan deret aritmetika atau deret geometri?
6. Bagaimana menentukan jumlah n suku pertama dari suatu deret?
7. Bagaimana menentukan jumlah deret geometri tak hingga?

Kata Kunci

Barisan aritmetika, barisan geometri, deret aritmetika, deret geometri, deret geometri tak hingga

Peta Konsep





Ayo Mengingat Kembali

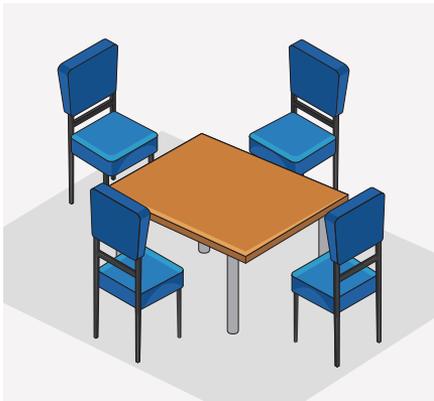
- Pola bilangan adalah susunan bilangan yang membentuk pola tertentu.
- Suku ke-1 dilambangkan dengan U_1 .
- Suku ke-2 dilambangkan dengan U_2 .
- Suku ke-3 dilambangkan dengan U_3 .
- Suku ke-n dilambangkan dengan U_n .

Eksplorasi 2.1 Meja Segi Empat

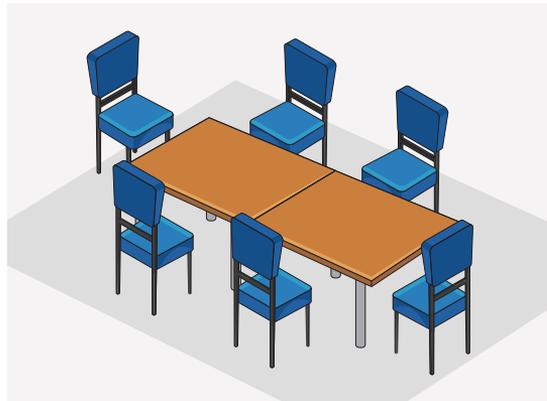


Ayo Bereksplorasi

Ayo bandingkan banyak meja dan kursi pada kedua gambar di bawah ini. Pada Gambar 2.1, terdapat satu meja berbentuk segiempat yang dilengkapi empat kursi. Jika dua meja disatukan, maka dapat dilengkapi dengan 6 kursi (Gambar 2.2)



Gambar 2.1 Meja Segi Empat dengan Empat Kursi



Gambar 2.2 Dua Meja Segi Empat Disatukan



Ayo Berdiskusi

Jawablah pertanyaan berikut dengan berdiskusi bersama teman kelompokmu.

1. Berapa orang yang dapat duduk di kursi dengan sejumlah meja yang disatukan? Ayo berkolaborasi dengan temanmu dalam mengisi tabel 2.1 untuk menjawab pertanyaan tersebut.

Tabel 2.1 Banyak Meja dan Kursi

Banyak meja	1	2	3	4	5	6
Banyak kursi	4	6

2. Jika terdapat 20 orang yang akan makan bersama dalam satu meja, maka berapa meja yang perlu disatukan? Bagaimana kalian mengetahuinya? Jelaskan jawabanmu.

A. Barisan

Tabel 2.1 menampilkan pola bilangan: 4, 6, 8, 10,

Jika diamati lebih teliti, pola bilangan di atas disusun berdasarkan aturan tertentu.

Pola bilangan yang demikian disebut dengan **barisan bilangan**.

Terdiri dari berapa suku barisan bilangan tersebut?

- Suku ke-1 dilambangkan dengan $U_1 = \dots$
- Suku ke-2 dilambangkan dengan $U_2 = \dots$
- Suku ke-3 dilambangkan dengan $U_3 = \dots$
- Suku ke-4 dilambangkan dengan $U_4 = \dots$
- Suku ke- n dilambangkan dengan U_n

Sehingga, barisan bilangan dapat dinyatakan dalam **bentuk umum**, yaitu

$$U_1, U_2, U_3, U_4, \dots, U_n.$$

1. Barisan Aritmatika

- Selanjutnya, aturan apa yang ada pada barisan bilangan pada Tabel 2.1?
- Operasi penghitungan apa yang ada di antara suku-suku pada barisan bilangan di atas?



- Berapakah beda atau selisih antara dua suku yang berdekatan?

$$U_2 - U_1 = \dots - \dots = \dots$$

$$U_3 - U_2 = \dots - \dots = \dots$$

$$U_4 - U_3 = \dots - \dots = \dots$$

- Apakah beda atau selisih antara dua suku yang berdekatan selalu sama?

Suatu barisan dengan beda atau selisih antara dua suku berurutan selalu tetap atau konstan disebut **BARISAN ARITMETIKA**. Beda pada barisan aritmetika dilambangkan dengan b .

Seperti yang telah diuraikan di atas, untuk mencari beda dapat dilakukan dengan cara mengurangkan dua suku yang berurutan sehingga dapat dituliskan sebagai berikut.

$$b = U_2 - U_1$$

$$b = U_3 - U_2$$

$$b = U_4 - U_3 \text{ dan seterusnya.}$$

Jadi, beda pada barisan aritmetika dapat dinyatakan dengan $b = U_n - U_{(n-1)}$

Eksplorasi 2.2 Gedung Pertunjukan Seni



Ayo Bereksplorasi

Ayo cermati banyak kursi di tiap baris pada gedung pertunjukan seni yang tampak pada **Gambar 2.3**:

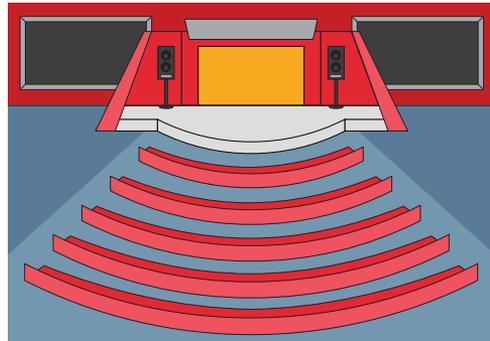
Baris ke-1 = 20

Baris ke-2 = 24

Baris ke-3 = 28

Baris ke-4 = 32

Baris ke-5 = 36



Gambar 2.3 Gedung Pertunjukan Seni

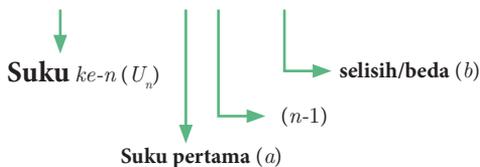
Berapakah jumlah kursi pada bariske-15?

Untuk menentukan banyak kursi pada baris ke-15, sebelumnya kalian amati terlebih dahulu banyak kursi di tiap baris.

- Berapa beda atau selisih banyak kursi pada tiap baris?
- Baris ke-1 = 20
- Baris ke-2 = 24 = 20 + ... (20 ditambah ... sebanyak ... kali)
= 20 + (... × ...)
- Baris ke-3 = 28 = 20 + ... + ... (20 ditambah ... sebanyak ... kali)
= 20 + (... × ...)

- Baris ke-4 = $32 = 20 + \dots + \dots + \dots$ (20 ditambah ... sebanyak ... kali)
= $20 + (\dots \times \dots)$
- Baris ke-5 = $36 = 20 + \dots + \dots + \dots + \dots$ (20 ditambah ... sebanyak ... kali)
= $20 + (\dots \times \dots)$
- Jadi, pada baris ke-15 = 20 ditambah ... sebanyak kali
= $20 + (\dots \times \dots) = \dots$

Baris ke-15 = $20 + (\dots \times \dots) = \dots$



Jadi, rumus umum menentukan suku $ke-n$ pada barisan aritmetika adalah:

$$U_n = a + (n - 1) b$$

Keterangan:

U_n = suku $ke-n$ a = suku pertama n = nomor suku b = beda

Contoh:

1. Diketahui suatu barisan aritmetika, suku $ke-3 = 9$, suku $ke-6 = 18$. Tentukan rumus suku $ke-n$.

Alternatif penyelesaian:

$$\begin{aligned}
 U_3 &= a + 2b = 9 \\
 U_6 &= a + 5b = 18 \\
 \hline
 -3b &= -9 \\
 b &= \frac{-9}{-3} \\
 b &= 3 \\
 a + 2b &= 9 \\
 a + 2(3) &= 9 \\
 a + 6 &= 9 \\
 a &= 9 - 6 \\
 a &= 3
 \end{aligned}$$

Rumus suku $ke-n$:

$$U_n = a + (n - 1)b$$

$$U_n = 3 + (n - 1)3$$

$$= 3 + 3n - 3$$

$$U_n = 3n$$

Jadi, rumus suku $ke-n$ dari barisan tersebut adalah $U_n = 3n$

2. Rudi menabung di bank dengan selisih kenaikan nominal uang yang ditabung antarbulan tetap. Jika pada bulan ke-5, nominal uang yang ditabung Rp70.000,00 dan pada bulan ke-9 Rudi menabung sebesar Rp90.000,00.
 - a. Berapa rupiah selisih nominal uang yang ditabung antarbulan?
 - b. Tentukan berapa rupiah uang yang ditabung Rudi untuk pertama kalinya?

Alternatif Penyelesaian:

$$U_5 = 70.000$$

$$a + (5 - 1)b = 70.000$$

$$a + 4b = 70.000 \dots \text{(persamaan 1)}$$

$$U_9 = 90.000$$

$$a + (9 - 1)b = 90.000$$

$$a + 8b = 90.000 \dots \text{(persamaan 2)}$$

Eliminasi Persamaan 1 dan 2

$$a + 8b = 90.000$$

$$a + 4b = 70.000 \underline{-}$$

$$4b = 20.000$$

$$b = 5.000$$

b adalah beda atau selisih.

Jadi, selisih nominal uang yang ditabung Rudi antarbulan adalah Rp5.000,00.

Selanjutnya, menentukan uang yang ditabung Rudi pertama kali, yaitu menentukan suku pertama yang dilambangkan dengan a dengan bantuan nilai b (beda) yang telah diketahui.

Gunakan persamaan 1, lalu substitusi nilai b (beda) yang telah diperoleh.

$$a + 4b = 70.000$$

$$a + 4(5.000) = 70.000$$

$$a + 20.000 = 70.000$$

$$a = 70.000 - 20.000$$

$$a = 50.000$$

a adalah suku pertama.

Jadi, uang yang ditabung Rudi untuk pertama kalinya adalah sebesar Rp50.000,00.

Penjelasan di atas menggunakan Persamaan 1 untuk menentukan suku pertama. Bagaimana jika menggunakan Persamaan 2? Apakah hasilnya akan sama?



Ayo Mencoba

Latihan 2.1

1. Tuliskan dua suku berikutnya dari barisan bilangan di bawah ini.
 - a. 8, 5, 2, -1, ...
 - b. 2, 3, 5, 8,
 - c. -15, -11, -7, ...
 - d. ...10, 8, 4, -2, ...

Pertanyaan singkat di bawah ini dapat membantu kalian dalam menjawab soal nomor 1.

- Apakah barisan di atas barisan aritmetika?
 - Jika iya, berapa beda dari barisan tersebut? Lalu, tentukan dua suku berikutnya dari barisan di atas.
 - Jika tidak, maka aturan apa yang terdapat pada barisan bilangan tersebut?
2. Tentukan suku ke-50 dari barisan berikut: 5, -2, -9, -16, ...

Pertanyaan singkat di bawah ini dapat membantu kalian dalam menjawab soal nomor 2.

- Berapa beda pada barisan tersebut?

- $U_n = a + (n - 1)b$

Maka, suku ke-50 = $U_{50} = \dots$

3. Jika diketahui barisan aritmetika dengan suku ke - 3 = $-4\frac{1}{2}$ dan suku ke - 8 = -2 . Tentukan suku pertama, beda, serta rumus suku $ke - n$ dari barisan tersebut.



Hint

Tahap penyelesaian soal nomor 3 dapat dilihat pada contoh soal 1 dan 2.

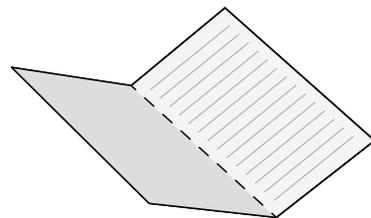
2. Barisan Geometri



Ayo Bereksplorasi

Eksplorasi 2.3 Melipat kertas

Siapkan kertas berbentuk persegi panjang, lalu ayo bereksplorasi melipat kertas beberapa kali. Jika kertas tersebut dilipat sebanyak 1 kali seperti pada Gambar 2.4, maka kertas akan terbagi menjadi 2 bagian sama besar. Lanjutkan melipat kertas sebanyak beberapa kali, lalu tuliskan jumlah bagian sama besar yang terbentuk pada Tabel 2.2.



Gambar 2.4 Kertas Dilipat Satu Kali

Tabel 2.2 Jumlah Lipatan Kertas dan Bagian Sama Besar yang Terbentuk

Jumlah melipat kertas	1 kali	2 kali	3 kali	4 kali
Banyaknya bagian sama besar yang terbentuk	2 bagian	... bagian	... bagian	... bagian



Ayo Berpikir Kreatif

Temukan cara melipat kertas yang berbeda. Bagaimana dengan jumlah bagian sama besar yang terbentuk? Apakah sama dengan yang ada pada tabel? Jelaskan.

- Apakah banyaknya bagian yang sama besar pada lipatan kertas membentuk barisan bilangan?
- Aturan apa yang terdapat pada barisan bilangan tersebut?
- Operasi hitung apa yang ada di antara suku-suku pada barisan bilangan di atas?

$$\begin{array}{cccc} 2 & 4 & 8 & \dots \\ \underbrace{\quad} & \underbrace{\quad} & \underbrace{\quad} & \\ \dots & \dots & \dots & \end{array}$$

- Ayo amati rasio antara dua suku yang berdekatan.

$$\frac{U_2}{U_1} = \frac{\dots}{\dots} = \dots$$

$$\frac{U_3}{U_2} = \frac{\dots}{\dots} = \dots$$

$$\frac{U_4}{U_3} = \frac{\dots}{\dots} = \dots$$

- Apakah rasio antara dua suku yang berdekatan selalu sama?

Suatu barisan dengan rasio antara dua suku berurutan selalu tetap atau konstan disebut **BARISAN GEOMETRI**. Rasio pada barisan geometri dilambangkan dengan r . Seperti yang telah diuraikan di atas, untuk mencari rasio dapat dengan membagi dua suku yang berurutan. Dengan demikian, dapat dituliskan sebagai berikut.

$$r = \frac{U_2}{U_1}$$

$$r = \frac{U_3}{U_2}$$

$$r = \frac{U_4}{U_3} \text{ dan Seterusnya}$$

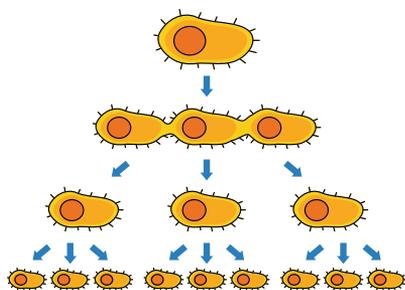
Jadi, rasio pada barisan geometri dapat dinyatakan dengan

$$r = \frac{U_n}{U_{n-1}}$$

Eksplorasi 2.4 Pembelahan Bakteri



Ayo Bereksplorasi



Gambar 2.5 Pembelahan pada Bakteri

Bakteri merupakan makhluk hidup yang berkembang biak dengan cara membelah diri. Dalam waktu dua jam, satu sel bakteri membelah diri menjadi 3 bagian seperti pada Gambar 2.5. Ayo mencari jumlah bakteri setelah 20 jam, jika jumlah awal adalah 2 sel bakteri!

Untuk menentukan jumlah sel bakteri setelah 20 jam, kalian harus melengkapi pernyataan di bawah ini.

- Suku pertama pada permasalahan di atas adalah
- Tiap dua jam, membelah menjadi 3, maka rasio pada barisan di atas adalah

Dalam 20 jam, terjadi pembelahan sebanyak $20 \text{ jam} : 2 \text{ jam} = \dots \text{ kali} \rightarrow n = 10$.

$$U_{\dots} = \dots$$

$$U_1 = 2$$

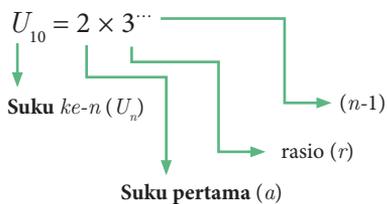
$$U_2 = 2 \times \dots \quad (2 \text{ dikali } 3 \text{ sebanyak } \dots \text{ kali}) = 2 \times 3^{\dots}$$

$$U_3 = 2 \times \dots \times \dots \quad (2 \text{ dikali } 3 \text{ sebanyak } \dots \text{ kali}) = 2 \times 3^{\dots}$$

$$U_4 = 2 \times \dots \times \dots \times \dots \quad (2 \text{ dikali } 3 \text{ sebanyak } \dots \text{ kali}) = 2 \times 3^{\dots}$$

$$U_5 = 2 \times \dots \times \dots \times \dots \times \dots \quad (2 \text{ dikali } 3 \text{ sebanyak } \dots \text{ kali}) = 2 \times 3^{\dots}$$

$$U_{10} = 2 \text{ dikali } 3 \text{ sebanyak } \dots \text{ kali}$$



Jadi, rumus umum menentukan suku $ke-n$ pada barisan geometri adalah:

$$U_n = a \cdot r^{n-1}$$

Keterangan:

$$U_n = \text{suku } ke-n \quad a = \text{suku pertama} \quad n = \text{nomor suku} \quad r = \text{rasio}$$

Contoh:

1. Suku pertama dari suatu barisan geometri adalah 4 dan suku ke-4 adalah 108. Tentukan rasio dari barisan tersebut.

Alternatif penyelesaian:

$$\begin{aligned}
 a &= 4 \\
 U_4 &= 108 \\
 a \cdot r^{4-1} &= 108 \quad (\text{substitusi nilai } a) \\
 4 \cdot r^3 &= 108 \\
 r^3 &= \frac{108}{4} \\
 &= 27 \\
 r &= \sqrt[3]{27} \\
 &= 3
 \end{aligned}$$

Jadi, rasio barisan geometri tersebut adalah 3.

2. Seutas tali dibagi menjadi 5 bagian dengan ukuran panjang membentuk suatu barisan geometri. Jika tali yang paling pendek adalah 16 cm dan tali yang paling panjang adalah 81 cm, maka tentukan panjang tali pada potongan ketiga.

Alternatif penyelesaian:

Tali yang paling pendek : $a = 16$

Tali yang paling panjang : $U_5 = 81$

$U_3 = \dots$

Kalian harus menentukan rasio terlebih dahulu.

$$\begin{aligned}
 U_5 &= 81 \\
 a \cdot r^{(5-1)} &= 81 \\
 a \cdot r^4 &= 81 \quad (\text{substitusi nilai } a) \\
 (16) \cdot r^4 &= 81 \\
 r^4 &= \frac{81}{16} \\
 r &= \sqrt[4]{\frac{81}{16}} \\
 r &= \frac{\sqrt[4]{81}}{\sqrt[4]{16}} \\
 r &= \frac{3}{2} \\
 U_3 &= a \cdot r^{(3-1)} \\
 U_3 &= 16 \cdot r^{(2)} \\
 U_3 &= 16 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^2 \\
 U_3 &= 16 \cdot \frac{9}{4} \\
 U_3 &= 36
 \end{aligned}$$



Pada soal mengenai barisan geometri, dapat juga memanfaatkan konsep sifat bilangan eksponen.

Jadi, panjang tali pada potongan ketiga adalah 36 cm.

Latihan 2.2

1. Tuliskan dua suku berikutnya dari barisan bilangan di bawah ini.

a. $\frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \dots, \dots$

c. 2, 2, 4, 12, ...

b. 25, 5, 1, ..., ...

d. 3, 3, 3, 3, ...

Pertanyaan singkat di bawah ini dapat membantu kalian dalam menjawab soal nomor 1.

- Apakah barisan di atas merupakan barisan geometri atau aritmetika? Bagaimana kalian mengetahuinya? Lalu, tentukan dua suku berikutnya dari barisan di atas.
- Jika bukan keduanya, maka aturan apa yang ada pada barisan bilangan tersebut? Ayo diskusikan dengan teman kelompokmu.

2. Tentukan suku ke-10 dari barisan 64, 32, 16, 8,

Pertanyaan singkat di bawah ini dapat membantu kalian dalam menjawab soal nomor 2.

- Berapa rasio pada barisan tersebut?
- $U_n = ar^{n-1}$

Maka, suku ke-10 = $U_{10} = \dots \dots \dots$

3. Jika diketahui barisan geometri dengan suku ke-2 = 80 dan suku ke-6 = 5.

Tentukan tiga suku pertama dari barisan geometri tersebut.



Ayo Berefleksi

Pada subbab 2.1, kalian telah belajar mengenai barisan aritmetika dan geometri.

1. Apa perbedaan antara barisan aritmetika dan geometri?
2. Bagaimana kalian mengetahui suatu barisan merupakan barisan aritmetika atau geometri?



Ayo Berpikir Kreatif

Berikan contoh aplikasi barisan bilangan dalam kehidupan sehari-hari selain dari yang telah dibahas pada subbab 2.1.



Ayo Berpikir Kritis

Seorang teman kalian mengatakan bahwa jika rasio pada barisan geometri berupa bilangan bulat/bilangan pecahan positif, maka barisan geometri tersebut terdiri dari bilangan bulat/pecahan positif. Dan apabila rasionya bilangan bulat/pecahan negatif, maka barisan geometri tersebut terdiri dari bilangan bulat/pecahan negatif. Setujukah kalian dengan pendapatnya? Jelaskan.

B. Deret



Ayo Mengingat Kembali

Barisan bilangan, terdiri atas barisan aritmetika dan barisan geometri.

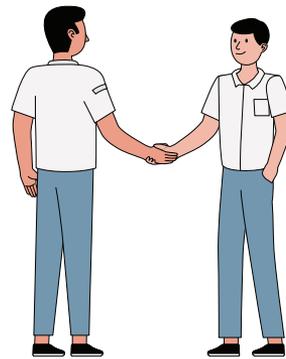
- Beda pada barisan aritmetika dinyatakan dengan $b = U_n - U_{n-1}$
- Suku $ke-n$ barisan aritmetika dinyatakan dengan $U_n = a + (n - 1)b$.
- Rasio pada barisan geometri dinyatakan dengan $r = \frac{U_n}{U_{n-1}}$.
- Suku $ke-n$ barisan geometri dinyatakan dengan $U_n = a \cdot r^{n-1}$

Eksplorasi 2.5: Jabat Tangan



Ayo Bereksplorasi

Ayo bereksplorasi dengan melakukan jabat tangan dengan beberapa teman yang ada di kelompokmu.



Gambar 2.6 Siswa SMA Saling Berjabat Tangan



Ayo Berdiskusi

Setelah itu, jawablah pertanyaan berikut dengan berkolaborasi bersama anggota kelompok.

1. Jika ada 2 orang, berapa banyak jabat tangan yang terjadi?
2. Jika ada 3 orang, berapa banyak jabat tangan yang terjadi?

3. Jika ada 4 orang, berapa banyak jabat tangan yang terjadi?
4. Berapa total siswa dalam kelompokmu, dan berapa banyak jabat tangan yang terjadi? Bagaimana kalian mengetahuinya?



Ayo Berpikir Kritis

Apakah banyak jabat tangan di atas membentuk barisan? Jelaskan jawabanmu.

Dari Eksplorasi 2.5, banyak jabat tangan yang terjadi dapat dinyatakan sebagai berikut.

Tabel 2.3 Banyak Jabat Tangan yang Terjadi di Kelas

Banyaknya orang yang hadir	Banyak jabat tangan	Uraian dari banyak jabat tangan
Dua orang	1	1
Tiga orang	3	1 + 2
Empat orang	..	1 + ... + ...
Lima orang	...	1 + ... + ... + ...

- Apakah uraian dari jumlah jabat tangan merupakan bentuk penjumlahan dari barisan bilangan?

Bentuk penjumlahan dari barisan bilangan akan membentuk deret bilangan.

Jadi, **deret bilangan adalah jumlah suku-suku penyusun barisan bilangan.**

Deret bilangan, terdiri dari deret aritmetika dan deret geometri.

1. Deret Aritmetika



Gambar 2.7

CARL FRIEDRICH GAUSS

Sumber: shorturl.at/auOW0

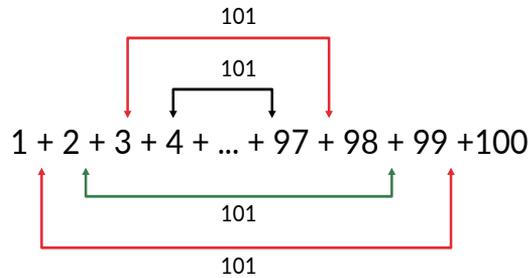


Tahukah Kalian?

Carl Friedrich Gauss (1777-1855) adalah seorang matematikawan Jerman yang telah menunjukkan bakatnya sejak kecil. Ketika duduk di kelas 4 SD, guru matematikanya memberikan soal berupa penjumlahan bilangan $1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 98 + 99 + 100 = \dots$

Tidak membutuhkan waktu yang lama, Gauss yang saat itu masih berusia 10 tahun langsung menjawab “5050”.

Berikut cara Gauss menyelesaikan penjumlahan bilangan tersebut.



Ia mengelompokkan suku-suku pada deret tersebut sehingga memiliki nilai yang sama ketika dijumlahkan.

$$\begin{aligned}
 1 + 2 + 3 + \dots + 98 + 99 + 100 &= (1 + 100) + (2 + 99) + \dots + (50 + 51) \\
 &= \underbrace{101 + 101 + \dots + 101}_{50 \times} \\
 &= 50 \times 101 \\
 &= 5050
 \end{aligned}$$

Sekarang, ayo cermati kembali deret bilangan di atas.

$$1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 98 + 99 + 100 = \dots$$

- Apakah bilangan pada deret di atas membentuk barisan?
- Barisan apakah yang dibentuk dari suku-suku pada deret di atas?

Deret aritmetika adalah suatu deret yang diperoleh dari menjumlahkan suku-suku pada barisan aritmetika.

Dari barisan aritmetika: $U_1, U_2, U_3, U_4, \dots, U_n$.

Dapat dibentuk deret aritmetika: $U_1 + U_2 + U_3 + U_4 + \dots + U_{10}$

$$\begin{array}{ll}
 U_1 = a & U_6 = a + 5b \\
 U_2 = a + b & U_7 = a + 6b \\
 U_3 = a + 2b & U_8 = a + 7b \\
 U_4 = a + 3b & U_9 = a + 8b \\
 U_5 = a + 4b & U_{10} = a + 9b
 \end{array}$$

Jumlah 4 suku pertama deret aritmetika: S_4

$$\begin{aligned}
 S_4 &= U_1 + U_2 + U_3 + U_4 \\
 &= a + (a + b) + (a + 2b) + (a + 3b) \\
 &= 4a + 6b \\
 &= 2(2a + 3b) \\
 S_4 &= \frac{4}{2} (2a + (4 - 1)b)
 \end{aligned}$$

Jumlah 10 suku pertama deret aritmetika: S_{10}

$$\begin{aligned}
 S_{10} &= U_1 + U_2 + U_3 + U_4 + \cdots + U_{10} \\
 &= a + (a + b) + (a + 2b) + (a + 3b) + (a + 4b) + (a + 5b) \\
 &\quad + (a + 6b) + (a + 7b) + (a + 8b) + (a + 9b) \\
 &= 10a + 45b \\
 &= 5(2a + 9b) \\
 S_{10} &= \frac{10}{2} (2a + (10 - 1)b)
 \end{aligned}$$

<p>Jumlah 4 suku pertama deret aritmetika</p> $S_4 = \frac{4}{2} (2a + (4 - 1)b)$	<p>Jumlah 10 suku pertama deret aritmetika</p> $S_{10} = \frac{10}{2} (2a + (10 - 1)b)$
<p>Dari kedua contoh di atas, maka dapat disimpulkan bahwa rumus Jumlah n suku pertama deret aritmetika:</p> $ \begin{aligned} S_n &= U_1 + U_2 + U_3 + \cdots + U_n \\ &= a + (a + b) + (a + 2b) + \cdots + (a + (n - 1)b) \end{aligned} $ <p>Penjumlahan deret aritmetika dibalik dari U_1 menuju U_n menjadi U_n menuju U_1</p> $ \begin{aligned} S_n &= (a + (n - 1)b) + (a + (n - 2)b) + \cdots + (a + b) + a \\ S_n &= a + (a + b) + (a + 2b) + \cdots + (a + (n - 2)b) + (a + (n - 1)b) \\ 2S_n &= \underbrace{(2a + (n - 1)b) + (2a + (n - 1)b) + \cdots + (2a + (n - 1)b)}_{n \times} \\ 2S_n &= n(2a + (n - 1)b) \\ S_n &= \frac{n}{2} (2a + (n - 1)b) \\ S_n &= \frac{n}{2} (a + [a + (n - 1)b]) \\ S_n &= \frac{n}{2} (a + U_n) \\ S_n &= \frac{n}{2} (2a + (n - 1)b) \quad \text{Karena, } U_n = a + (n - 1)b \\ S_n &= \frac{n}{2} (a + U_n) \end{aligned} $	

Rumus untuk menghitung jumlah suku-suku deret aritmetika adalah

$$S_n = \frac{n}{2} (a + U_n) \text{ atau } S_n = \frac{n}{2} (2a + (n - 1)b)$$

Keterangan: S_n = jumlah deret sebanyak n suku pertama

a = suku pertama

b = beda

n = banyaknya suku



Ayo Mencoba

Dengan rumus di atas, ayo hitunglah berapa jumlah deret bilangan

$$1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 98 + 99 + 100 = \dots$$

Apakah hasilnya sama dengan penghitungan Gauss?

Contoh:

Diketahui deret: $13 + 16 + 19 + 22 + \dots$

Jumlah 30 suku pertama deret tersebut adalah \dots

Alternatif penyelesaian:

Suku pertama atau $a = 13$

$$b = 3$$

$$n = 30$$

$$\begin{aligned} S_{30} &= \frac{30}{2} [2(13) + (30 - 1)3] \\ &= 15(26 + 29 \cdot 3) \\ &= 15(26 + 87) \\ &= 15 \cdot 113 \\ &= 1.695 \end{aligned}$$

2. Deret Geometri

Eksplorasi 2.6 Jumlah Pasien Terinfeksi Covid-19



Ayo Bereksplorasi

Di suatu kota tercatat peningkatan yang signifikan dari jumlah pasien yang terinfeksi Covid-19. Berikut data yang dihimpun dari Gugus Covid-19 kota tersebut.

Tabel 2.4 Jumlah Pasien Terinfeksi Covid-19 dalam Waktu 5 Bulan

Bulan	Januari 2020	Februari 2020	Maret 2020	April 2020	Mei 2020
Jumlah pasien	4	12	36	108	324

Jawablah pertanyaan di bawah ini terkait data pada tabel 2.4.

- Apakah jumlah pasien membentuk barisan bilangan?
- Berapa beda atau rasio dari barisan di atas?
- Terdiri dari berapa suku barisan tersebut?



Ayo Bekerja Sama

Ayo cermati jumlah suku-suku deret geometri dengan melengkapi Tabel 2.5 melalui data yang ada pada Tabel 2.4 bersama teman kelompokmu.

Tabel 2.5 Proses Menemukan Kembali Rumus Jumlah Deret Geometri

	1	2	3
S_2 : jumlah pasien dua bulan pertama	$S_2 = 4 + 12 = \dots$	$S_2 = \frac{36 - 4}{3 - 1} = \frac{\dots}{\dots} = \dots$	$S_2 = \frac{U_3 - U_1}{r - 1}$
S_3 : jumlah pasien tiga bulan pertama	$S_3 = \dots + \dots + \dots$ $= \dots$	$S_3 = \frac{\dots - \dots}{\dots - \dots} = \frac{\dots}{\dots} = \dots$	$S_3 = \frac{U_{\dots} - U_1}{r - 1}$
S_4 : jumlah pasien empat bulan pertama	$S_4 = \dots + \dots + \dots + \dots$ $\dots = \dots$	$S_4 = \frac{\dots - \dots}{\dots - \dots} = \frac{\dots}{\dots} = \dots$	$S_4 = \frac{U_{\dots} - U_1}{r - 1}$

Dari kolom nomor 3 diperoleh:

$$\begin{aligned}
 S_n &= \frac{U_{n+1} - U_1}{r - 1} \\
 &= \frac{ar^{(n+1)-1} - a}{r - 1} \\
 &= \frac{ar^n - a}{r - 1} \\
 S_n &= \frac{a(r^n - 1)}{r - 1}
 \end{aligned}$$

Sehingga, rumus untuk menghitung jumlah suku-suku deret geometri adalah:

$$S_n = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1}, \text{ untuk } r \neq 1 \text{ dan } r > 1.$$

$$S_n = \frac{a(1 - r^n)}{1 - r}, \text{ untuk } r \neq 1 \text{ dan } r < 1.$$

Keterangan: S_n = jumlah deret sebanyak n suku pertama
 a = suku pertama
 r = rasio
 n = banyaknya suku

Contoh:

Hasil produksi sebuah perusahaan sepeda pada tahun 2020 meningkat setiap bulannya dan membentuk barisan geometri. Produksi pada bulan Januari sebanyak 120 unit. Pada bulan April, hasil produksi mencapai 3.240 unit. Berapakah total hasil produksi sepeda hingga bulan Mei?

Alternatif penyelesaian:

Hasil produksi Januari: $U_1 = a = 120$

Hasil produksi April: $U_4 = 3.240$

Total hasil produksi hingga bulan Mei: S_5

Sebelum menentukan S_5 , harus dicari ratio (r) terlebih dahulu.

$$a = 120$$

$$U_4 = 3.240$$

$$a \cdot r^3 = 3.240$$

$$120 \cdot r^3 = 3.240 \quad (\text{substitusi nilai } a)$$

$$r^3 = \frac{3.240}{120}$$

$$= 27$$

$$r = \sqrt[3]{27}$$

$$= 3$$

$$S_n = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1}$$

$$S_5 = \frac{120(3^5 - 1)}{3 - 1}$$

$$= \frac{120(243 - 1)}{2}$$

$$= 60 \cdot 242$$

$$= 14.520$$

Jadi, total hasil produksi sepeda hingga bulan Mei adalah sebanyak 14.520 unit.

Latihan 2.3

1. Tentukanlah jumlah bilangan kelipatan 4 di antara bilangan 10 hingga 100.

Petunjuk singkat di bawah ini dapat membantu kalian dalam menjawab soal nomor 1.

- Sebelum menentukan jumlah deret bilangan, kalian harus menentukan terlebih dahulu jumlah. Tuliskan terlebih dahulu bilangan kelipatan 4 dari 10 hingga 100:
- $12 + \dots + \dots + \dots + \dots + \dots + \dots$
- Suku terakhir dari deret bilangan tersebut adalah
- Suku terakhir: $U_n = a + (n - 1)b$
- Selanjutnya, menentukan S_n dengan nilai n yang telah diketahui sebelumnya.
- Jadi, jumlah bilangan kelipatan 4 di antara bilangan 10 hingga 100 adalah



Untuk mengetahui banyaknya suku pada deret tersebut, kalian harus mengetahui suku pertama, beda dan banyak suku terlebih dahulu.

2. Suku pertama dan rasio dari suatu deret geometri berturut-turut adalah 9 dan 3. Tentukan banyak suku jika diketahui jumlah deret bilangan tersebut adalah 9.837.

Petunjuk singkat di bawah ini dapat membantu kalian dalam menjawab soal nomor 2.

- Dari soal, diketahui:

$$a = \dots \qquad r = \dots \qquad S_n = \dots$$

- Dengan tiga informasi di atas, maka dapat ditentukan $n = \dots$

3. Diketahui deret geometri berikut ini: $\frac{3}{2} + 3 + 6 + 12 + \dots + Y = \frac{762}{4}$. Tentukan nilai Y .

Petunjuk singkat di bawah ini dapat membantu kalian dalam menjawab soal nomor 3.

- Dengan nilai a , r dan S_n yang telah terdapat pada soal, kalian akan mendapatkan nilai n .
- Setelah memperoleh nilai n , kalian dapat menentukan nilai Y .

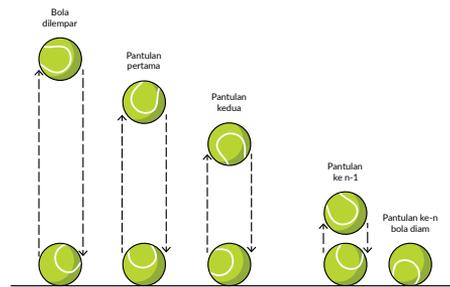
3. Deret Geometri Tak Hingga

Eksplorasi 2.7 Panjang Lintasan Bola



Ayo Bereksplorasi

Bola tenis dilemparkan ke atas setinggi 1 m. Bola tersebut akan terus memantul sampai akhirnya berhenti. Setelah dicermati, setiap kali bola memantul, tingginya menjadi $\frac{1}{4}$ kali dari tinggi pantulan sebelumnya. Kira-kira berapa panjang lintasan bola dari awal memantul sampai berhenti? Ayo bereksplorasi dengan melakukan percobaan melempar bola bersama teman kelompokmu, lalu jawablah pertanyaan di bawah ini.



Gambar 2.8 Lintasan Bola

- Menurutmu, apakah tinggi pantulan bola pada permasalahan di atas membentuk deret geometri? Bagaimana kalian mengetahuinya?
- Setelah melakukan percobaan, apakah kalian mengetahui dengan pasti berapa kali bola memantul sampai akhirnya berhenti?



Ayo Berpikir Kreatif

Apakah panjang lintasan bola akan sama jika bola dijatuhkan dari ketinggian tertentu atau dilempar dari bawah? Jelaskan jawabanmu.

Pada permasalahan diketahui rasio = $\frac{1}{4}$.

Maka total panjang lintasan dapat ditentukan dengan rumus jumlah deret geometri berikut:

$$S_n = \frac{a(1 - r^n)}{1 - r}$$
$$r = \frac{1}{4} \text{ maka } r^2 = \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{16}$$

$$r = \frac{1}{4}$$

$$r^2 = \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{16}$$

$$r^3 = \left(\frac{1}{4}\right)^3 = \frac{1}{64}$$

$$r^4 = \left(\frac{1}{4}\right)^4 = \frac{1}{256}$$
$$r^n \rightarrow 0$$

$$S_n = \frac{a(1 - 0)}{1 - r}$$

$$S_n = \frac{a(1 - 0)}{1 - r}, \text{ dengan } n = \infty \quad -1 < r < 1$$

$$S_\infty = \frac{a}{1 - r}$$

Deret geometri tak hingga konvergen dengan $-1 < r < 1$: $S_\infty = \frac{a}{1 - r}$

Deret geometri tak hingga divergen dengan $r < -1$ atau $r > 1$: $S_\infty = \frac{a \pm \infty}{1 - r} = \pm \infty$.

Keterangan:

S_∞ = jumlah deret geometri tak hingga a = suku pertama r = rasio



Ayo Berpikir Kritis

Mengapa jumlah suku deret geometri tak hingga divergen hasilnya $\pm \infty$?
Jelaskan jawabanmu!



Ayo Mencoba

Ayo berkolaborasi dengan teman kelompokmu, lalu hitunglah berapa total panjang lintasan bola tenis pada Eksplorasi 2.7?



Hint

Dalam menghitung Panjang lintasan bola, terdapat dua deret tak hingga, yaitu: deret tak hingga ketika bola jatuh dan ketika bola memantul ke atas.

Contoh:

Tentukan jumlah deret tak hingga dari $81 + 27 + 9 + 3 + \dots$

Alternatif penyelesaian:

Deret tak hingga di atas merupakan deret tak hingga konvergen, karena $r = \frac{1}{3}$ masuk dalam rentang

$-1 < r < 1$, maka jumlah deret tak hingga adalah:

$$\begin{aligned}
 S_{\infty} &= \frac{a}{1-r} \\
 &= \frac{81}{1-\frac{1}{3}} \\
 &= \frac{81}{\frac{2}{3}} \\
 &= 81 \cdot \frac{3}{2} \\
 S_{\infty} &= \frac{243}{2}
 \end{aligned}$$

Latihan 2.4

1. Suku pertama suatu deret geometri tak hingga adalah x . Tentukan x yang memenuhi sehingga jumlah deret geometri tak hingga tersebut adalah 10.

Petunjuk singkat di bawah ini dapat membantu kalian dalam menjawab soal nomor 1.

- Soal di atas hanya berisi informasi yaitu $S_{\infty} = 10$.
- Karena $S_{\infty} = 10$ maka deret geometri tak hingga yang dimaksud pada soal adalah deret geometri tak hingga konvergen.
- Hubungkan rumus jumlah deret geometri tak hingga dengan syarat rasio pada deret konvergen.



Hint

Dalam menyelesaikan soal deret tak hingga, kalian harus selalu ingat syarat rasio dari deret konvergen maupun divergen

2. Agar deret geometri $1 + (m - 1) + (m - 1)^2 + (m - 1)^3 + \dots$ merupakan deret konvergen, tentukan nilai m .

Petunjuk singkat di bawah ini dapat membantu kalian dalam menjawab soal nomor 2.

- Tentukan terlebih dahulu rasio dari deret tersebut.
3. Tentukan jumlah deret geometri tak hingga $4 + 12 + 36 + 108 + \dots$.
Petunjuk singkat di bawah ini dapat membantu kalian dalam menjawab soal nomor 3.
- Selidiki terlebih dahulu, deret geometri tak hingga tersebut merupakan deret konvergen atau divergen.
 - Tentukan S_∞ .

Melalui subbab 2.2, kalian telah belajar mengenai deret aritmetika dan geometri.



Ayo Berefleksi

Apa perbedaan deret aritmetika dan geometri? Lalu apa perbedaan antara deret dan barisan? Jelaskan!

Apa perbedaan deret geometri tak hingga konvergen dan divergen? Jelaskan



Ayo Berpikir Kreatif

Berikan contoh aplikasi deret bilangan dalam kehidupan sehari-hari selain dari yang telah dibahas.

Berikan contoh aplikasi deret geometri tak hingga konvergen dan divergen selain dari yang telah dibahas pada subbab 2.2.3.

Latihan 2.5

Soal Pemahaman

1. Suku ke-3 suatu barisan aritmetika adalah 28.500 dan suku ke-7 adalah 22.500. Tentukan nilai n agar suku $ke-n = 0$.
2. Suku ketiga dan kelima barisan geometri berturut-turut adalah 20 dan 80. Tentukan suku ke-10 barisan tersebut.
3. Hitunglah jumlah dari deret berikut.

4. $1 + \frac{5}{3} + \frac{7}{3} + \dots + \frac{23}{3}$
5. $\frac{1}{27} + \frac{1}{9} + \dots + 243$

Soal Aplikasi

6. Pertambahan penduduk di suatu desa setiap tahunnya membentuk barisan geometri. Pada tahun 2021, penduduk bertambah sebanyak 10 orang, lalu pada tahun 2023 sebanyak 90 orang. Berapa jumlah pertambahan penduduk pada tahun 2025?
7. Pak Artus seorang peternak ayam. Ia mengumpulkan telur ayam sebanyak 30.000 butir selama 2 bulan. Banyak telur yang Pak Artus kumpulkan membentuk barisan aritmetika. Pada hari pertama ia mengumpulkan telur ayam sebanyak 50 butir. Berapa butir telur yang Pak Artus kumpulkan pada hari terakhir?
8. Penambahan jumlah pasien yang terjangkit virus Covid-19 di suatu kota melonjak dua kali lipat di tiap minggunya. Berdasarkan data yang di rumah sakit, pada minggu pertama terdapat 24 orang yang dinyatakan positif. Pada minggu ketiga, tercatat 96 pasien positif Covid-19. Berapa total jumlah pasien pada bulan kedua?
9. Sebuah bola dijatuhkan dari ketinggian 8 meter. Apabila ketinggian yang dicapai saat memantul tiga perlima kali tinggi sebelumnya, tentukan panjang lintasan yang dilalui bola tersebut hingga berhenti memantul.

Soal Penalaran

10. Keliling lima buah lingkaran membentuk barisan aritmetika. Jika luas lingkaran terbesar adalah 1.386 cm^2 dan luas lingkaran terkecil adalah 154 cm^2 . Tentukan keliling lingkaran pada urutan ketiga. $\pi = \frac{22}{7}$
11. Sisipkan 5 bilangan di antara 3 dan 192 agar susunan bilangan tersebut membentuk barisan geometri.
12. Sisi segitiga sama sisi panjangnya 20 cm. Di dalamnya terdapat segitiga sama sisi kedua dengan menghubungkan titik-titik tengah sisi-sisi segitiga pertama. Hal yang sama untuk segitiga ketiga, keempat, kelima, dan keenam. Berapa total keliling semua segitiga?

Refleksi

Dalam bab ini, kalian sudah belajar mengenai barisan dan deret.

1. Apa itu barisan?
2. Apa perbedaan barisan aritmetika dan barisan geometri?
3. Apa itu deret?
4. Apa perbedaan barisan dan deret?
5. Apa perbedaan deret aritmetika dan deret geometri?
6. Apa perbedaan deret geometri tak hingga konvergen dan divergen?

Materi Pengayaan

1. Buatlah suatu barisan geometri, dengan menentukan suku pertama, rasio, dan banyak suku pada tabel di bawah ini.

Barisan geometri 1.

Suku pertama
Rasio
Banyak suku
... , ... , ... , ... , ... , ...	

2. Dari barisan yang telah kalian buat, ubahlah rasionya menjadi bilangan yang lebih besar, sajikan barisan geometri yang baru pada tabel di bawah ini.

Barisan geometri 2.

Suku pertama
Rasio
Banyak suku
... , ... , ... , ... , ... , ...	



Ayo Berpikir Kritis

Apa yang terjadi pada suku-suku pada barisan tersebut setelah diubah nilai rasionya? Jelaskan!

3. Prediksilah, bagaimana suku-suku pada barisan tersebut jika rasionya diganti dengan $\frac{1}{2}$ dari rasio pada barisan geometri pertama.

4. Kalian dapat melihat perubahan dari suku-suku pada barisan geometri serta tampilan grafiknya pada aplikasi Geogebra melalui link berikut:

<https://www.geogebra.org/m/k8b2b2kn>

(sumber: Geogebra.org, penulis: Firmansyah)



Ayo Menggunakan Teknologi

Bentuk grafik pada barisan dapat dilihat menggunakan aplikasi Geogebra.

Uji Kompetensi

1. Tentukan suku ke-10 dan jumlah 10 suku pertama dari deret berikut:
 - a. $4 + 2 + 1 + \dots$
 - b. $4 + 1 + (-2) + \dots$
2. Tentukan suku ke-9 barisan aritmetika, jika diketahui jumlah dari suku ke-2, suku ke-5, dan suku-20 adalah 54.
3. Sebuah pipa dipotong menjadi 5 bagian. Panjang masing-masing bagian membentuk barisan geometri. Jika potongan pipa terpendek sepanjang 4 cm, dan potongan pipa terpanjang adalah 324 cm, maka tentukan panjang pipa semula.
4. Pada suatu ruang pertemuan, jumlah kursi pada baris tertentu lebih banyak 2 kursi dari baris sebelumnya. Perbandingan banyak kursi pada baris ke-5 dan baris ke-13 adalah 1 : 2. Baris terakhir terisi 50 kursi. Berapa total kursi pada ruang pertemuan tersebut?
5. Tentukan jumlah deret geometri tak hingga $\frac{1}{x} + \frac{1}{xy} + \frac{1}{xy^2} + \dots \dots \dots$, jika diketahui $\frac{x+y}{xy} = 1$.