

Kementerian Pendidikan, Kebudayaan, Riset, dan Teknologi
Republik Indonesia, 2021

Matematika untuk SMA/SMK Kelas X

Penulis: Dicky Susanto, dkk

ISBN: 978-602-244-526-5

Bab

3

Vektor dan Operasinya

Pengalaman Belajar

Setelah mempelajari bab ini, kalian diharapkan dapat:

1. menyatakan vektor dalam berbagai representasi;
2. menunjukkan beberapa jenis vektor;
3. menyatakan vektor dalam komponen-komponen sistem koordinat;
4. melakukan operasi vektor serta menginterpretasi hasilnya secara geometris dan fisik; serta
5. menggunakan operasi vektor untuk menyelesaikan masalah kehidupan sehari-hari.

Berapa jauh dan ke mana arahnya?

Saat kalian berada di daerah wisata yang luas dan ingin mendatangi beberapa objek wisata, kalian mungkin menemukan dua jenis petunjuk jalan seperti pada Gambar 3.1 dan 3.2 berikut.



Gambar 3.1 Petunjuk Lokasi dengan Arah

Sumber: <http://kebunrayadaerah.krbogor.lipi.go.id/kebun-rayakuningan.html>



Gambar 3.2 Petunjuk Lokasi dengan Arah dan Jarak

Sumber: gudanglampuku.com

Petunjuk mana yang memberikan kepastian lokasi? Mengapa?

Kalian paham bahwa mengetahui jarak dan arah dari suatu lokasi ke lokasi lain merupakan hal yang sangat penting. Pesawat terbang memerlukan kepastian berapa jauh dan ke arah mana apabila berpindah dari suatu lokasi ke lokasi lain. Bukan itu saja, besar dan arah kecepatan juga berubah selama perjalanan. Padatnya lalu lintas udara dan angin juga memengaruhi gerak pesawat.

Pemain bola dapat memperkirakan arah tendangannya dan kelajuan bola agar bola mencapai rekan setimnya atau masuk gawang. Olahraga permainan memerlukan jarak dan arah serta besar dan arah kecepatan.

Vektor adalah besaran yang mempunyai besar atau nilai dan arah. Contohnya adalah perpindahan dan kecepatan. Besaran skalar hanya mempunyai besar atau nilai, tidak mempunyai arah. Contoh besaran skalar adalah massa melon 2,00 kg. Semua bilangan

real merupakan skalar, dapat bernilai nol atau positif atau negatif.

Dalam bab ini, kalian akan belajar tentang terminologi dan notasi vektor. Kalian akan mempelajari hubungan antara vektor dengan sistem koordinat. Komponen-komponen vektor dinyatakan dalam pasangan terurut (x,y) dan (x,y,z) . Kalian akan menentukan kesamaan atau ekuivalensi dua vektor. Kalian akan belajar beberapa jenis vektor. Dua atau lebih vektor dapat dijumlahkan dan dikurangkan sehingga suatu vektor merupakan kombinasi linier dari dua atau lebih vektor. Vektor juga dapat dikalikan dengan suatu skalar.

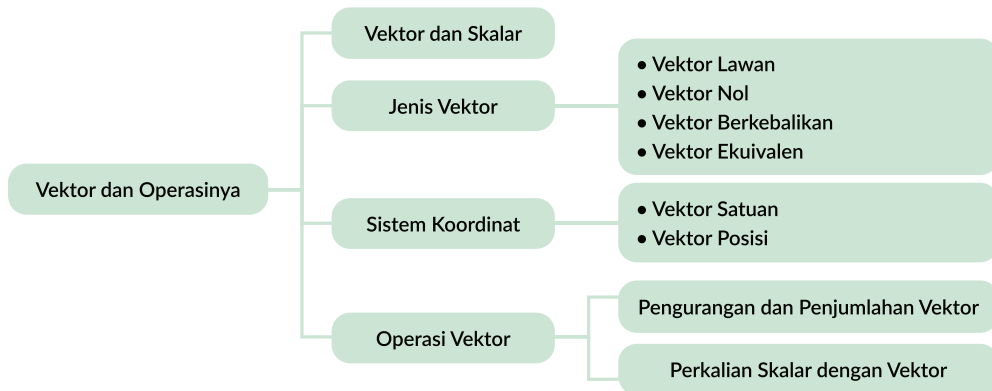
Pertanyaan Pemantik

- Bagaimana merepresentasikan vektor?
- Apakah vektor dapat dioperasikan seperti bilangan biasa?
- Apa pentingnya peran vektor dalam kehidupan sehari-hari?

Kata Kunci

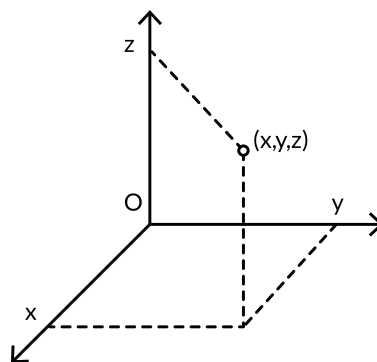
Ruas garis berarah, vektor lawan, vektor berkebalikan, vektor posisi, vektor nol, penjumlahan dan pengurangan vektor, perkalian skalar dengan vektor.

Peta Konsep



Ayo Mengingat Kembali

Untuk mempelajari vektor kalian perlu mengulang kembali sistem koordinat Kartesius yang merupakan tempat kedudukan titik-titik.



Gambar 3.3 Sistem Koordinat Kartesius

Sistem koordinat dapat berdimensi dua (dibentuk oleh dua sumbu yang saling tegak lurus) dan berdimensi tiga (dibentuk oleh tiga sumbu yang saling tegak lurus satu sama lain).

Perpotongan sumbu-sumbu terjadi di titik O. Arah dapat dinyatakan dengan kanan-kiri, atas-bawah dan depan-belakang. Sudut berkaitan dengan arah. Pada mata angin sudut 0° menunjukkan arah timur, sudut 90° menunjukkan arah utara, dan arah timur laut sama dengan sudut 45° .

Kalian akan mengulang sifat komutatif dan sifat asosiatif pada penjumlahan vektor. Kalian akan menerapkan aturan perkalian pada operasi perkalian skalar dengan vektor.

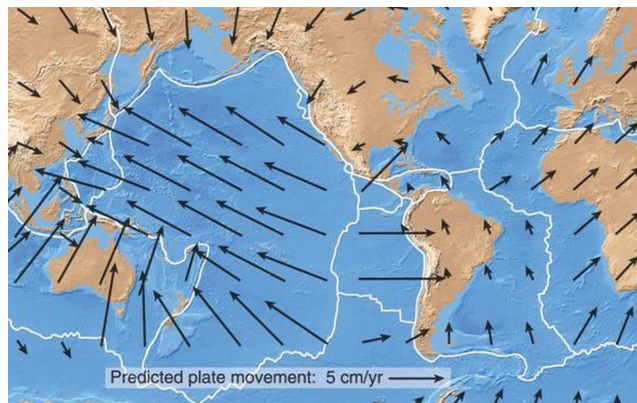
A. Terminologi, Notasi, dan Jenis Vektor

Eksplorasi 3.1 Apa itu Vektor?



Ayo Bereksplorasi

Peta di bawah menunjukkan prediksi kecepatan gerak lempeng bumi yang ditunjukkan oleh anak panah. Batas-batas lempeng ditandai dengan warna putih. Ukuran 5 cm/tahun diberikan oleh anak panah di bawah sebagai patokan. Lempeng bumi yang bergerak dapat bertemu dengan lempeng bumi lainnya. Pertemuan dua lempeng bumi dapat menyebabkan terjadinya gempa bumi atau tsunami.



Gambar 3.4 Prediksi Kecepatan Lempeng Bumi

Sumber: <https://spotlight.unavco.org/how-gps-works/gps-and-tectonics/gps-and-tectonics.html>,



Ayo Bekerja Sama

Kalian perhatikan anak panah-anak panah dalam gambar dan kerjakan soal-soal di bawah ini.

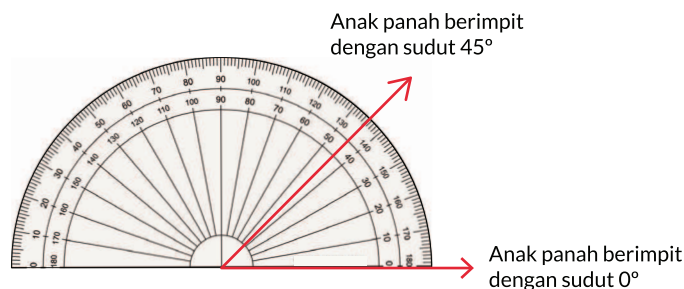
1. Lingkari satu lempeng bumi yang bergerak paling cepat.
2. Lingkari satu lempeng bumi yang bergerak paling lambat.
3. Apakah ada dua anak panah yang arahnya saling berlawanan?
4. Lingkari tiga anak panah yang arah dan panjangnya sama.
5. Apakah artinya jika dua anak panah mempunyai arah dan panjang yang sama?
6. Pilih tiga anak panah pada lempeng-lempeng yang dilalui Indonesia, namakan anak panah pertama, kedua' dan ketiga.

Gunakan penggaris dan busur untuk menentukan panjang dan arah (sudut) anak panah.

Jadikan panjang 5 cm/tahun (5 cm/year) dalam gambar 3.4 sebagai patokan sehingga hasil pengukuran perlu disesuaikan dengan patokan untuk mendapatkan kecepatan gerak lempeng. Misalnya, patokan anak panah 5 cm/year mempunyai panjang 0,6 cm. Salah satu anak panah panjangnya 0,3 cm maka kecepatan gerak lempeng adalah $\frac{0,3}{0,6} \times 5 = 2,5$ cm/tahun. Angka $\frac{0,3}{0,6}$ disebut sebagai perbandingan panjang.

Tuliskan hasilnya ke dalam tabel.

Cara mengukur sudut adalah sebagai berikut.



Gambar 3.5 Cara Mengukur Sudut

Tentukan garis horizontal yang berimpit dengan busur.

Bacalah bilangan pada busur yang berimpit dengan arah anak panah.

Tabel 3.1 Besar dan Arah Kecepatan Lempeng Bumi

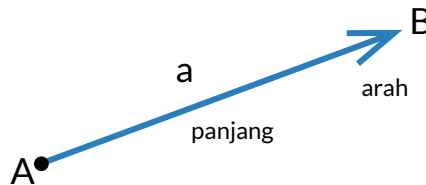
Anak Panah	Arah (°)	Panjang (cm)	Perbandingan Panjang	Kecepatan gerak (cm/tahun)
Pertama				
Kedua				
Ketiga				



Ayo Berdiskusi

Menurut kalian, apa manfaat menggambarkan gerak lempeng dengan anak panah pada peta?

Gerak lempeng bumi digambarkan dengan anak panah yang memudahkan para ilmuwan untuk memprediksi pertemuan dua lempeng sehingga dapat mengantisipasi bencana yang muncul. Panjang anak panah menunjukkan seberapa cepat lempeng bergerak. Arah anak panah menunjukkan arah gerak. Anak panah merupakan ruas garis berarah yang menyatakan vektor. Makin panjang ruas garisnya, makin besar nilai vektornya. Arah vektor ditunjukkan oleh arah panah.



Gambar 3.6 Vektor dan Notasi

Notasi vektor adalah sebagai berikut.

$\overrightarrow{AB}$ dimana A adalah pangkal vektor atau titik pangkal, sedangkan B adalah ujung vektor atau titik ujung.

Panjang vektor $\overrightarrow{AB}$ ditulis sebagai $|\overrightarrow{AB}|$.

Vektor $\overrightarrow{AB}$ juga dapat dituliskan dengan menggunakan huruf bercetak tebal, sebagai **AB**.

Penulisan vektor lainnya dengan menggunakan satu huruf yaitu **a** atau $\vec{a}$ atau **A** atau $\vec{A}$.

Dalam bab ini notasi vektor menggunakan huruf tebal, tetapi kalian dapat membuatnya dengan menggunakan anak panah.



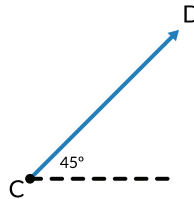
Ayo Berpikir Kritis

Apakah bentuk-bentuk di bawah ini merupakan vektor? Mengapa? Ayo jelaskan!



1. Panjang dan Arah Vektor

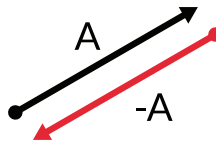
Kalian perhatikan vektor **CD** dengan panjang 4 cm dan arahnya membentuk sudut 45° dengan horizontal. Kalian dapat menyebutkan vektor **CD** dengan panjang 4 cm dan arah Timur Laut jika merujuk pada arah mata angin.



Gambar 3.7 Besar dan Arah Vektor

2. Vektor Negatif atau Vektor Lawan

Andi berjalan sejauh 100 m dengan arah 30° , kemudian Andi kembali ke posisi semula.



Gambar 3.8 Vektor dan Vektor Lawan

Vektor **A** atau $\vec{A}$ menyatakan perpindahan Andi yang pertama.

Vektor **-A** atau $-\vec{A}$ menyatakan perpindahan Andi yang kedua.

Vektor **A** dan **-A** sama panjang tetapi berlawanan arah.

-A adalah vektor lawan dari **A**.

Vektor negatif atau vektor lawan adalah vektor dengan besar sama, tetapi arah berlawanan dengan suatu vektor.

Vektor Nol $\vec{0}$

Vektor nol adalah vektor dengan panjang nol dan tidak punya arah tertentu atau vektor dengan titik pangkal dan ujung yang sama. Vektor nol dinyatakan dengan titik secara grafis.

Jika Andi berjalan sejauh 100 m ke timur kemudian 100 m ke barat maka Andi mengalami perpindahan 0.



Ayo Berpikir Kritis



Apakah vektor A merupakan vektor lawan dari B?



Ayo Mencoba

Gambarkan vektor lawan dari $\vec{CD}$, yaitu vektor $\vec{DC}$. Lihat vektor $\vec{CD}$ pada gambar 3.7.



Ayo Berdiskusi

Berapa sudut yang dibentuk antara vektor $\vec{CD}$ dengan vektor $\vec{DC}$?

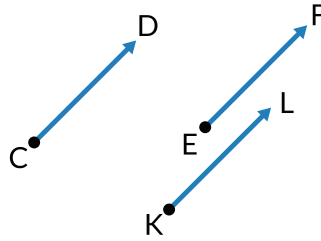
3. Vektor Ekuivalen (Vektor yang Sama)

Jika ada vektor lain dengan panjang 3 cm dan sudut 45° , maka dikatakan vektor tersebut ekuivalen dengan vektor $\vec{CD}$.

Ketiga vektor, dalam gambar 3.9, sama atau ekuivalen walaupun ketiganya mempunyai titik awal yang berbeda, sehingga dapat dituliskan sebagai berikut.

$$\vec{CD} = \vec{EF} = \vec{KL}$$

Vektor $\vec{CD}$ ekuivalen dengan vektor $\vec{EF}$ dan vektor $\vec{KL}$.



Gambar 3.9 Vektor-Vektor Ekuivalen

Suatu vektor ekuivalen dengan vektor lain jika mempunyai besar dan arah yang sama dengan vektor lain tersebut.

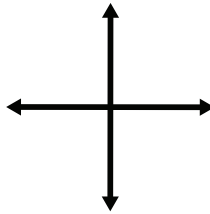
Pada peta lempeng bumi, coba kalian perhatikan vektor-vektor yang ekuivalen atau sama. Dapatkah kalian memberi contoh dua vektor ekuivalen dalam kehidupan sehari-hari?

Latihan 3.1

1. Gambarkan vektor kecepatan mobil dengan kelajuan 60 km/jam dan menuju arah timur. Tentukan titik awal dan titik akhir. Beri nama vektornya dan tuliskan skalanya.

Petunjuk menyelesaikan soal.

Tuliskan nama arah setiap mata angin.



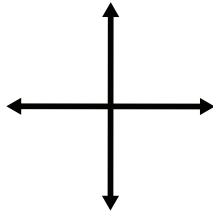
Untuk menggambar panjang vektor pikirkan skala 1 cm mewakili berapa km/jam.

Beri nama vektor tersebut berdasarkan titik awal (pangkal vektor) dan titik akhir (ujung vektor).

2. Gambarkan vektor kecepatan mobil dengan kelajuan 45 km/jam dan menuju arah tenggara. Tentukan titik awal dan titik akhir. Beri nama vektornya dan tuliskan skalanya.

Petunjuk menyelesaikan soal.

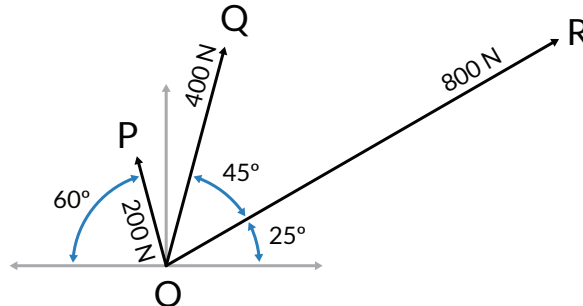
Tentukan arah tenggara pada mata angin.



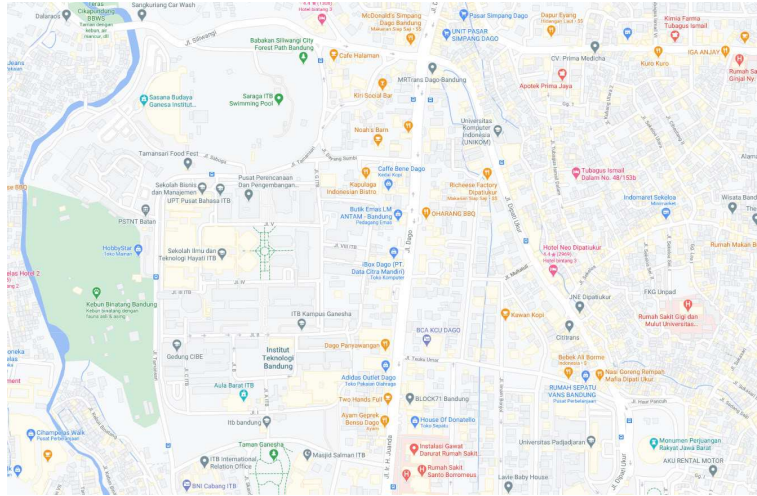
3. Gambarkan vektor kecepatan mobil dengan kelajuan 60 km/jam dan menuju arah barat daya. Tentukan titik awal dan titik akhir. Beri nama vektornya dan tuliskan skalanya.
4. Gambarkan vektor kecepatan mobil dengan kelajuan 60 km/jam dan arah gerak membentuk sudut 45° . Tentukan titik awal dan titik akhir. Beri nama vektornya dan tuliskan skalanya.
5. a. Gambarkan vektor kecepatan pesawat terbang dengan kelajuan 450 km/jam dan arah terbang membentuk sudut 120° .
b. Gambarkan vektor negatif dari nomor a.

Latihan 3.2

1. Tentukan nama, besar, dan arah dari setiap vektor di bawah ini.



2. Gambarkan vektor-vektor negatif dari vektor-vektor **OP**, **OQ**, dan **OR**. Gunakan skala untuk menggambar panjangnya.
3. Perhatikan peta kota Bandung di bawah ini.



Sumber: <https://goo.gl/maps/hvGqjkmLSGBnADwL9>

- Tentukan satu titik di Universitas Padjadjaran dan satu titik di Lebak Siliwangi.
- Buat vektor dari kedua titik tersebut, tentukan besar dan arah vektornya.
- Buat vektor dengan nilai (besar) yang lebih besar daripada nomor a tetapi arah sama.
- Buat vektor dengan nilai (besar) yang lebih kecil daripada nomor a tetapi arah sama.
- Buat vektor yang ekuivalen dengan vektor pada nomor a.



Ayo Berpikir Kritis

- Pesawat kecil sedang mengisi bahan bakar dari pesawat besar di udara. Mengapa vektor kecepatan pesawat kecil harus ekuivalen atau sama dengan pesawat besar?



Ayo Berpikir Kreatif

- Buatlah segitiga sama sisi dan bagilah menjadi beberapa segitiga kecil berukuran sama. Tentukan berapa banyak segitiga tersebut agar diperoleh 3 vektor ekuivalen.



Ayo Berefleksi

1. Apakah kalian dapat memberikan contoh-contoh vektor dalam kehidupan sehari-hari?
2. Apakah kalian dapat menggambarkan vektor dan menyebutkan notasinya?
3. Dapatkah kalian menentukan vektor-vektor ekuivalen?
4. Dapatkah kalian membuat vektor negatif atau vektor lawan dari suatu vektor?

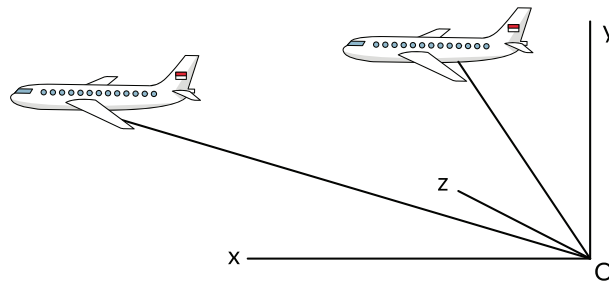


Ayo Menggunakan Teknologi

Kalian dapat menggunakan aplikasi GeoGebra untuk menggambar vektor dan belajar cara memanfaatkannya. <https://www.geogebra.org/>

B. Vektor dan Sistem Koordinat

Pilot pesawat terbang melaporkan posisinya selama penerbangan dari satu titik ke titik lain di udara kepada petugas menara pengawas bandara. Pilot akan meminta izin jika ingin mengubah ketinggian atau dan arah penerbangan.



Gambar 3.10 Posisi Pesawat Terbang dalam Sistem Koordinat Kartesius

Posisi memerlukan kerangka acuan atau sistem koordinat.

Sistem Koordinat Kartesius dicetuskan oleh Rene Descartes, ahli matematika berkebangsaan Prancis. Descartes menemukannya ketika mengamati lalat merayap di langit-langit rumahnya.

Eksplorasi 3.2 Menggambar Vektor pada Sistem Koordinat



Ayo Bereksplorasi

Untuk menyelesaikan eksplorasi di bawah ini kalian memerlukan kertas berpetak.

1. Mula-mula lalat berada di titik asal O dan merayap ke titik $P(3, 4)$. Lalat bergerak lagi menuju titik $Q(-2, -8)$ hingga berhenti di titik $R(2, -5)$. Tentukan titik O terlebih dahulu. Gambarkan vektor perjalanan lalat dalam sistem koordinat Kartesius. Gunakan penggaris dan busur untuk menentukan panjang dan sudut.
2. Lalat mula-mula berada pada titik $(2, 3)$ kemudian bergerak 1 petak ke barat lanjut dengan 1 petak ke selatan.
 - a. Tentukan titik asal terlebih dahulu, kemudian gambarkan vektornya. Tentukan panjang dan arah vektor.
 - b. Pilih titik asal terlebih dahulu, kemudian gambarkan vektornya. Tentukan panjang dan arah vektor.



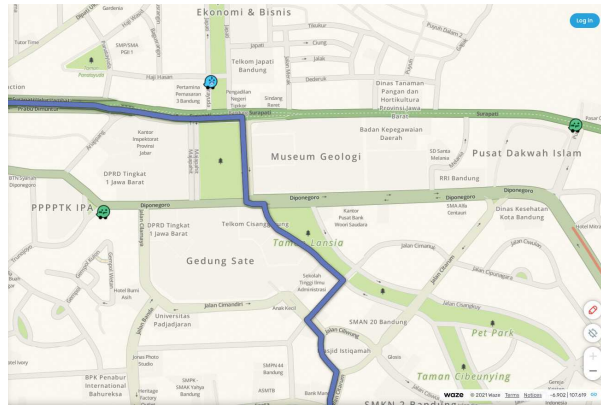
Ayo Berdiskusi dan Berpikir Kreatif

1. Apa perbedaan vektor dengan koordinat suatu titik?
2. Apakah pemilihan titik asal pada sistem koordinat memengaruhi besar dan arah vektor?

Lokasi suatu titik dapat dinyatakan dalam sistem koordinat Kartesius. Pada sistem koordinat dua dimensi, lokasi titik dinyatakan dalam pasangan terurut (x, y) dan pada sistem koordinat tiga dimensi, lokasi titik dinyatakan dalam (x, y, z) .

Jika suatu pesawat berada pada suatu titik tertentu dan waktu tertentu, maka dapat diketahui lokasi berikutnya jika diketahui vektor perpindahan pesawat.

Teknologi, melalui beberapa aplikasi, menolong manusia untuk memilih alternatif rute perjalanan yang melibatkan arah dan jarak tempuh dengan sistem koordinat.



Gambar 3.11 Menentukan Rute dengan Aplikasi
Sumber: <https://waze.com>

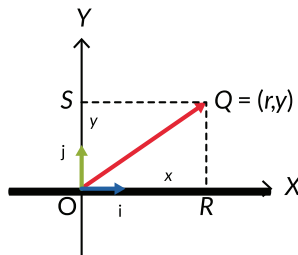


Ayo Berdiskusi

Dapatkah aplikasi perjalanan dibuat tanpa sistem koordinat Kartesius? Mengapa?

1. Vektor Berdimensi Dua pada Sistem Koordinat

Perhatikan sistem koordinat Kartesius di bawah ini.



Gambar 3.12 Vektor Berdimensi Dua

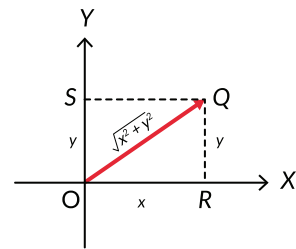
Koordinat titik O adalah $(0, 0)$ dan Q adalah (x, y) . Vektor satuan diperlukan untuk menunjukkan bagaimana mencapai titik Q dari titik O.

$\mathbf{i}$ adalah vektor satuan dalam arah-x (horizontal) dan $\mathbf{j}$ adalah vektor satuan dalam arah-y (vertikal). Vektor satuan mempunyai besar 1 satuan. Arah horizontal negatif dinyatakan dengan $-\mathbf{i}$ dan arah vertikal negatif dinyatakan dengan $-\mathbf{j}$.

Vektor $\mathbf{OQ}$ dinyatakan sebagai berikut.

$$\mathbf{OQ} = x \mathbf{i} + y \mathbf{j}$$

Ada dua komponen yang membentuk vektor $\mathbf{OQ}$, komponen horizontal dan komponen vertikal. Jika dari titik O arah komponen horizontal adalah timur-barat, maka arah komponen vertikal adalah utara-selatan. Komponen- x merupakan proyeksi ortogonal vektor pada sumbu- x . Komponen- y merupakan proyeksi ortogonal vektor pada sumbu- y .

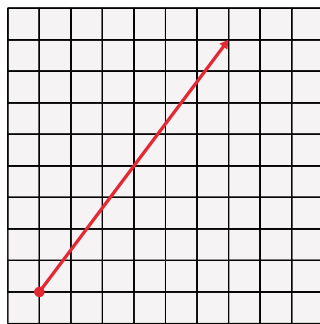


Gambar 3.13 Panjang Vektor Berdimensi Dua

Vektor dengan dua komponen disebut sebagai vektor berdimensi dua.

Panjang vektor sama dengan jarak antara titik pangkal dengan titik ujung. Jarak antara dua titik sama dengan panjang sisi miring dari segitiga siku-siku.

2. Komponen-Komponen Vektor



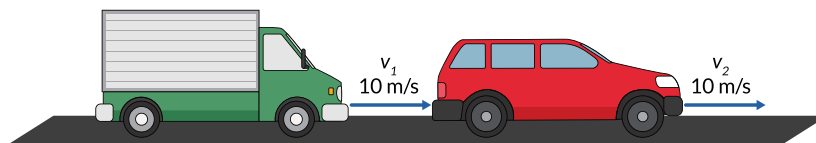
Gambar 3.14 Vektor $\mathbf{AB}$ dan Komponen-Komponennya

$$\mathbf{AB} = 6 \mathbf{i} + 8 \mathbf{j}$$

$$\text{Panjang vektor } \mathbf{AB} = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$$

3. Vektor-Vektor Ekuivalen pada Sistem Koordinat Kartesius

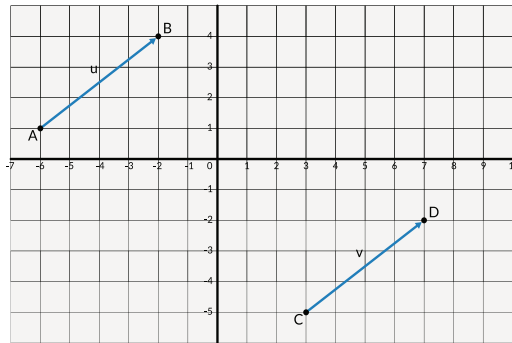
Dua mobil berbeda bergerak dengan kelajuan 10 m/detik dan dalam arah yang sama. Keduanya mempunyai vektor kecepatan yang sama walau berada pada posisi berbeda.



Gambar 3.15 Dua Vektor Kecepatan Ekuivalen

Kalian masih ingat bahwa dua vektor ekuivalen jika mempunyai besar dan arah sama, tidak bergantung pada letaknya.

Perhatikan dua vektor perpindahan dalam sistem koordinat di bawah ini.



Gambar 3.16 Dua Vektor Ekuivalen pada Sistem Koordinat

Vektor u dan v ekuivalen, dinyatakan dengan $4\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$, walau keduanya mempunyai koordinat titik pangkal dan koordinat titik ujung yang berbeda. Komponen horizontal dan komponen vertikal adalah 4 dan 3.



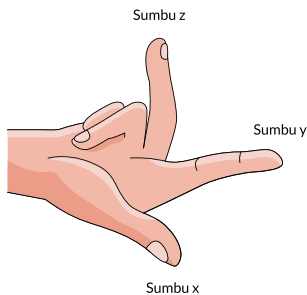
Ayo Berdiskusi

Mengapa vektor-vektor ekuivalen tidak bergantung pada letak mereka?

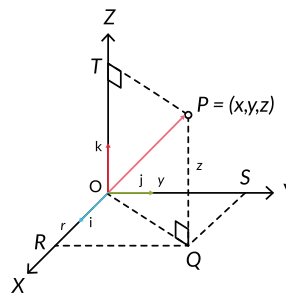
4. Vektor Berdimensi Tiga pada Sistem Koordinat Kartesius

Vektor dengan tiga komponen, disebut sebagai vektor berdimensi tiga. Jika dari titik O arah komponen horizontal adalah timur-barat, arah komponen vertikal adalah utara-selatan, maka arah satunya lagi adalah atas-bawah atau depan-belakang atau tegak lurus terhadap bidang xy .

Sistem koordinat tiga dimensi dapat diperagakan dengan tiga jari. Ibu jari menghadap ke kalian adalah sumbu- x , jari telunjuk mengarah ke kanan adalah sumbu- y dan jari tengah mengarah ke atas adalah sumbu- z .



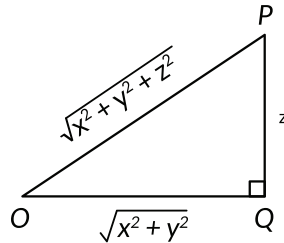
Gambar 3.17 Sistem Koordinat dengan Jari-Jari



Gambar 3.18 Vektor Berdimensi Tiga
 $OP = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$

$\mathbf{i}$ adalah vektor satuan dalam arah- x (horizontal), $\mathbf{j}$ adalah vektor satuan dalam arah- y (vertikal) dan $\mathbf{k}$ adalah vektor satuan, yang tegak lurus terhadap bidang xy . Arah horizontal negatif dinyatakan dengan $-\mathbf{i}$, arah vertikal negatif dinyatakan dengan $-\mathbf{j}$ dan arah negatif dalam z dinyatakan dengan $-\mathbf{z}$.

Panjang vektor diberikan sebagai berikut.



Gambar 3.19 Panjang Vektor Berdimensi Tiga

Vektor dapat saja berada dalam ruang berdimensi- n , tetapi kita hanya belajar vektor berdimensi dua dan vektor berdimensi tiga.

5. Vektor Kolom dan Vektor Baris

Vektor yang dituliskan dalam bentuk kolom adalah **vektor kolom**. Vektor yang dituliskan dalam bentuk baris adalah **vektor baris**. Komponen-komponen vektor kolom dituliskan sebagai berikut.

- $(3 \ 4)$ atau $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ untuk vektor berdimensi dua
- $(2 \ 1 \ 3)$ atau $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ untuk vektor berdimensi tiga

Vektor-vektor satuan dalam sistem koordinat Kartesius berdimensi dua adalah:

- vektor satuan dalam arah horizontal $(1 \ 0)$ atau $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$
- vektor satuan dalam arah vertikal $(0 \ 1)$ atau $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Vektor-vektor satuan dalam sistem koordinat Kartesius berdimensi tiga adalah:

- vektor satuan dalam arah horizontal $(1 \ 0 \ 0)$ atau $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
- vektor satuan dalam arah vertikal $(0 \ 1 \ 0)$ atau $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$
- vektor satuan dalam arah tegak lurus terhadap bidang xy $(0 \ 0 \ 1)$ atau $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

6. Vektor Satuan dari Suatu Vektor

Vektor satuan dapat saja diperluas pemahamannya. Kalian perhatikan vektor PQ yang berada pada sistem koordinat Kartesius.

Vektor satuan PQ adalah vektor PQ dibagi dengan panjangnya.

$$\mathbf{a}_{PQ} = \frac{\mathbf{PQ}}{|\mathbf{PQ}|}$$

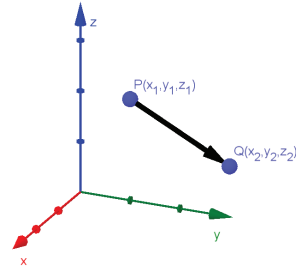
$|\mathbf{PQ}|$ adalah panjang vektor.

Vektor satuan menunjukkan arah vektor dalam suatu ruang.

Contoh soal: Menentukan vektor satuan dari $\mathbf{v}$.

$$\mathbf{v} = (3 \ 6 \ 4)$$

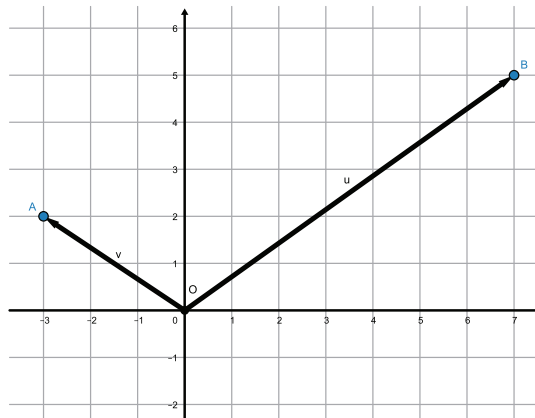
$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{v}} &= \frac{[3 \ 6 \ 4]}{\sqrt{3^2 + 6^2 + 4^2}} \\ &= \frac{[3 \ 6 \ 4]}{\sqrt{61}} \\ &= \left[\frac{3}{\sqrt{61}} \quad \frac{6}{\sqrt{61}} \quad \frac{4}{\sqrt{61}} \right]\end{aligned}$$



Gambar 3.20 Vektor PQ

7. Vektor Posisi

Vektor OA dan OB merupakan vektor posisi, karena dimulai dari titik asal O dan berakhir di A dan B . Vektor posisi selalu dimulai dari titik O dan berakhir pada suatu titik lain. Vektor posisi OA dan OB adalah $(-3 \ 2)$ dan $(7 \ 5)$.



Gambar 3.21 Vektor Posisi OA dan OB

Vektor posisi adalah vektor yang berpangkal di titik O yang merupakan pusat koordinat dan berujung di suatu titik dalam sistem koordinat.

8. Vektor Berkebalikan

Vektor $\mathbf{AB} = 6\mathbf{i} + 8\mathbf{j}$

Panjang vektor $\mathbf{AB} = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$

Vektor berkebalikan dari $\mathbf{AB}$ adalah $\frac{1}{100}(6\mathbf{i} + 8\mathbf{j})$.

Vektor berkebalikan adalah vektor yang panjangnya $\frac{1}{\text{panjang}}$ vektor tersebut.

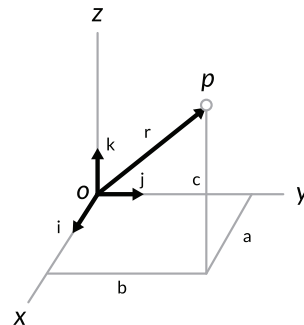
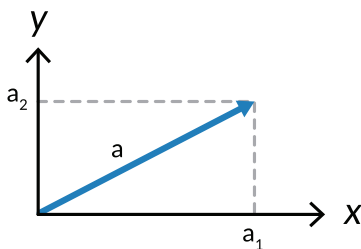


Tahukah Kalian?

Vektor berkebalikan digunakan dalam mempelajari kisi-kisi dari kristal zat padat.

Latihan 3.3

1. Nyatakan kedua vektor posisi dalam vektor kolom dan vektor baris.

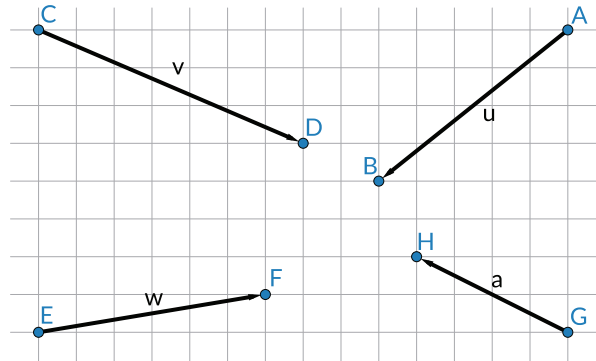


Ayo Berpikir Kreatif

2. Gambarkan vektor posisi yang diberikan oleh $\mathbf{OP} = 2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$ dan $\mathbf{OQ} = -\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$

Petunjuk tentukan sumbu x, y, dan z.

3. Tentukan vektor satuan dan vektor berkebalikan vektor-vektor dalam soal nomor 2.
4. a. Nyatakan vektor-vektor di bawah ini sebagai vektor kolom atau vektor baris.

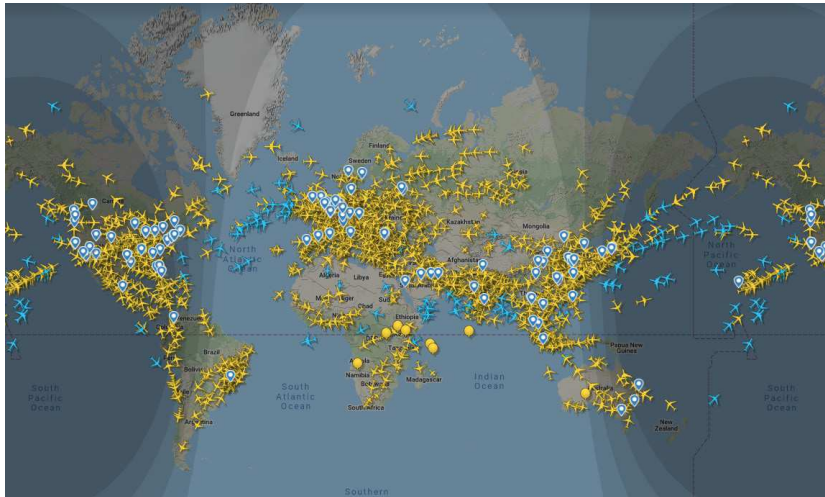


Latihan 3.4



Ayo Berpikir Kritis

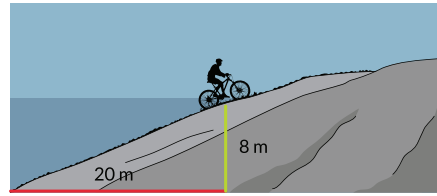
1. Perhatikan gambar dari aplikasi *flightradar24* yang menunjukkan 202.157 pesawat terbang di angkasa Bumi pada tanggal 29 Juni. Pesawat berukuran kecil maupun besar, juga pesawat komersial maupun bukan komersial.



Sumber: <https://www.independent.co.uk/travel/news-and-advice/flights-sky-map-worldwide-air-traffic-aviation-busiest-day-june-a8428451.html>

Apa peran vektor dan sistem koordinat dalam mengatur lalu lintas penerbangan?

2. Nyatakan vektor satuan dari vektor perpindahan seseorang yang sedang naik gunung dengan bersepeda. Tentukan arahnya dalam sistem koordinat.



3. Gunakan ubin di rumahmu sebagai sistem koordinat. Tentukan vektor perpindahan jika kalian berjalan dari suatu lokasi benda ke lokasi benda lainnya, misalnya dari lokasi lemari ke lokasi kursi. Ambillah posisi tengah untuk setiap lokasi.
4. Menurut kalian, apakah vektor kecepatan dapat dinyatakan dalam sistem koordinat?



Ayo Berefleksi

1. Apakah kalian dapat menunjukkan komponen-komponen suatu vektor dan menentukan panjangnya?
2. Bagaimana menyatakan komponen-komponen dalam vektor kolom dan vektor baris?
3. Apa perbedaan vektor posisi, vektor kolom, dan vektor berkebalikan?



Ayo Menggunakan Teknologi

Kalian dapat menggunakan aplikasi *GeoGebra* atau yang lainnya untuk menggambarkan vektor pada sistem koordinat Kartesius.

<https://www.geogebra.org/>

C. Operasi Vektor

1. Penjumlahan Vektor

Eksplorasi 3.3 Menentukan Rute dalam Bentuk Penjumlahan Vektor



Ayo Bereksplorasi

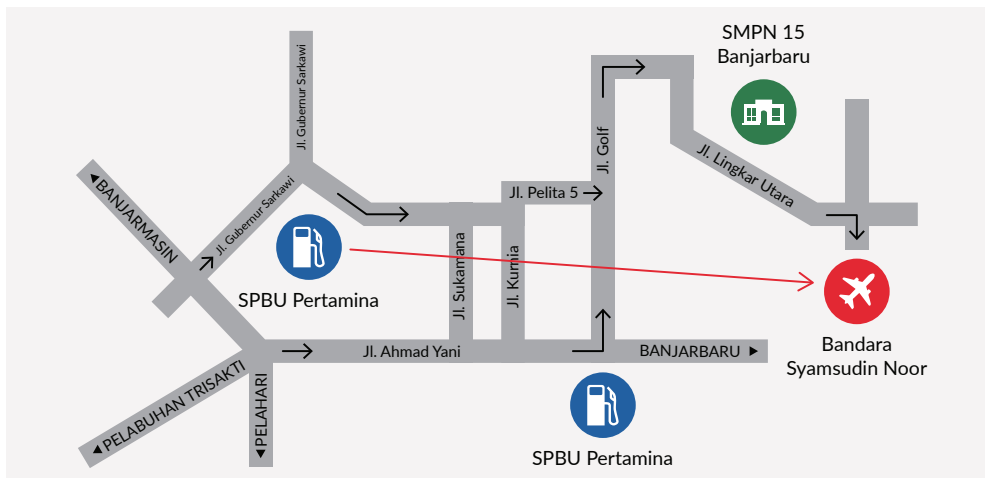
Perhatikan peta di bawah ini.

Apakah ada rute langsung dari pompa bensin ke Bandara Syamsudin Noor, yang ditandai dengan garis merah? Tentu saja tidak bisa.

Coba tentukan satu rute yang paling sederhana, gambarkan setiap vektor perpindahannya dari satu lokasi ke lokasi yang lain.

Ada berapa vektor yang digambarkan?

Kalian akan punya rangkaian vektor yang tidak terputus dengan setiap ujung vektor bertemu dengan pangkal vektor berikutnya.



Gambar 3.22 Peta Banjarmasin

Pikirkan satu masalah lagi.

Eksplorasi 3.4 Gerak Perahu Menyeberangi Sungai



Ayo Bereksplorasi

Sebuah perahu menyeberang sungai dengan kecepatan tertentu.



Gambar 3.23 Perahu Menyeberangi Sungai

Menurut kalian apakah yang terjadi dengan lintasan perahu jika:

- kelajuan arus sungai nol, dan
- kelajuan arus sungai tak nol?

Gambarkan lintasan perahu untuk dua kasus berbeda ini.

Kalian bisa melakukan kegiatan sederhana dengan menyediakan kertas A4 atau yang ukurannya berbeda dan perahu kertas yang diikat dengan tali. Kertas merupakan sungai sehingga jika arus sungai tak nol maka kertas harus digerakkan bersamaan dengan perahu. Perhatikan, arah gerak arus sungai tegak lurus terhadap gerak perahu.

Kedua masalah di atas merupakan masalah penjumlahan vektor. Penjumlahan vektor berbeda dengan penjumlahan skalar. **Hasil penjumlahan vektor disebut sebagai resultan vektor.**

Jika 2 kg gula dan 3 kg gula dijumlahkan, berapa hasilnya? Pasti 5 kg.

Bagaimana jika perpindahan 2 m dijumlahkan dengan perpindahan 3 m? Seseorang berjalan 2 m ke timur kemudian 3 m ke barat berbeda hasilnya dengan berjalan 2 m ke timur kemudian 3 m ke timur lagi.



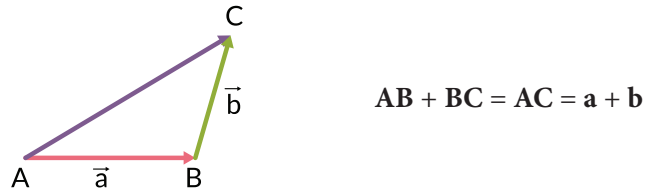
Ayo Berpikir Kritis

Menurut kalian apa perbedaan penjumlahan skalar dengan penjumlahan vektor?

Menarik kan, penjumlahan vektor? Ayo, kalian belajar lebih lanjut.

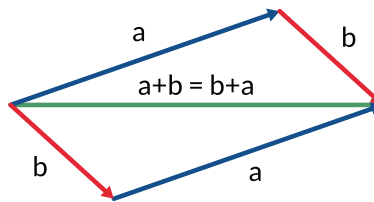
a. Penjumlahan Dua Vektor dengan Metode Segitiga

Penjumlahan vektor dapat dilakukan dengan cara grafis. Ujung vektor pertama bertemu dengan pangkal vektor kedua. Hasilnya adalah vektor dengan pangkal vektor pertama dengan ujung vektor kedua. Betuk penjumlahan adalah segitiga.



Gambar 3.24 Penjumlahan Vektor dengan Metode Segitiga

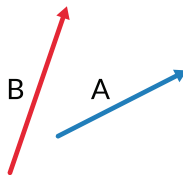
Penjumlahan vektor mengikuti sifat komutatif $a + b = b + a$



Gambar 3.25 Sifat Komutatif dari Penjumlahan Vektor



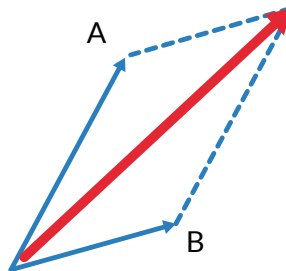
Ayo Mencoba



Tunjukkan bahwa $A + B = B + A$.

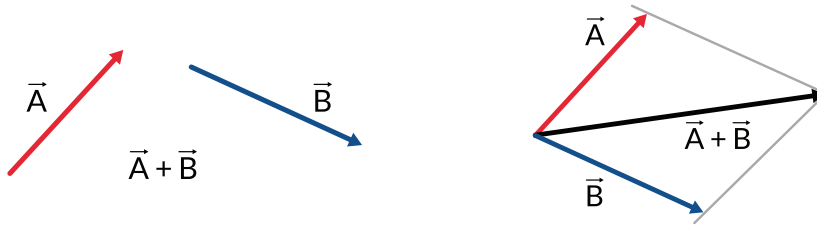
b. Penjumlahan Dua Vektor dengan Metode Jajar Genjang

Penjumlahan vektor berkaitan dengan bentuk jajar genjang.



Gambar 3.26 Penjumlahan Dua Vektor dengan Metode Jajar Genjang

Contoh soal: Jumlahkan kedua vektor di bawah ini



Gambar 3.27 Contoh Penjumlahan Dua Vektor dengan Metode Jajar Genjang

Penjumlahan dua vektor juga dapat mengambil bentuk persegi panjang.



Ayo Mencoba

Tunjukkan bahwa penjumlahan vektor dengan metode jajar genjang juga memenuhi sifat komutatif.



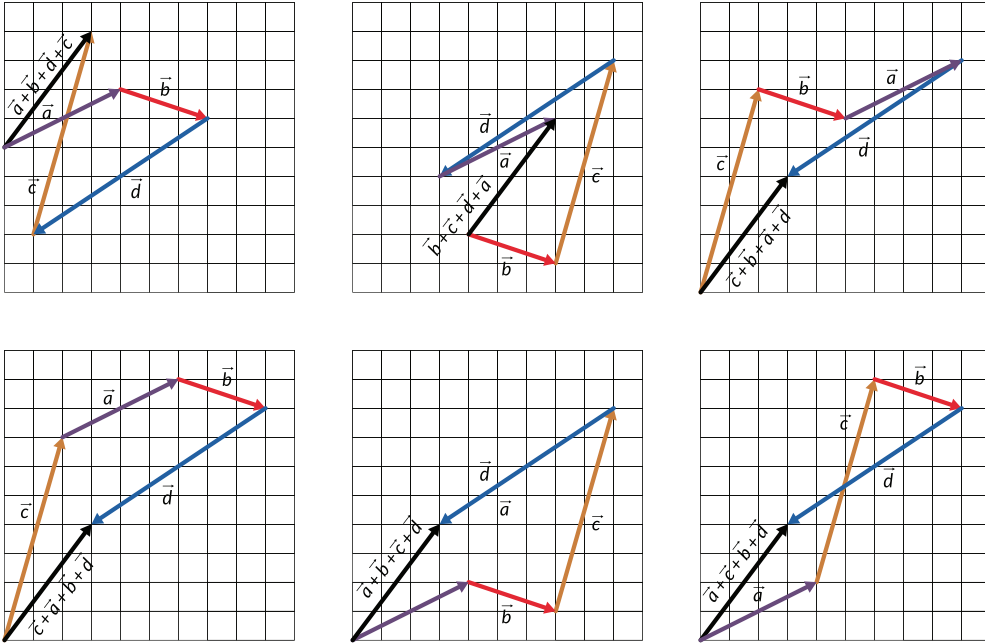
Ayo Berpikir Kreatif

Jika ada tiga vektor, bagaimana cara menjumlahkannya dengan metode jajar genjang?

c. Penjumlahan dengan Metode Poligon

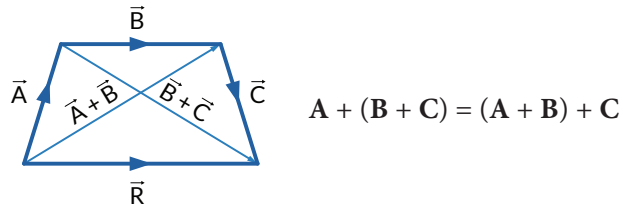
Sifat komutatif tetap berlaku untuk penjumlahan lebih dari dua vektor. Karena vektor hanya ditentukan oleh panjang dan arahnya, maka dapat dipindahkan dengan leluasa.

Penjumlahan secara grafis selalu dilakukan dengan cara ujung vektor sebelumnya bertemu dengan pangkal vektor sesudahnya.



Gambar 3.28 Penjumlahan Vektor dengan Metode Poligon

Penjumlahan vektor juga memenuhi sifat asosiatif.



Gambar 3.29 Sifat Asosiatif Penjumlahan Vektor

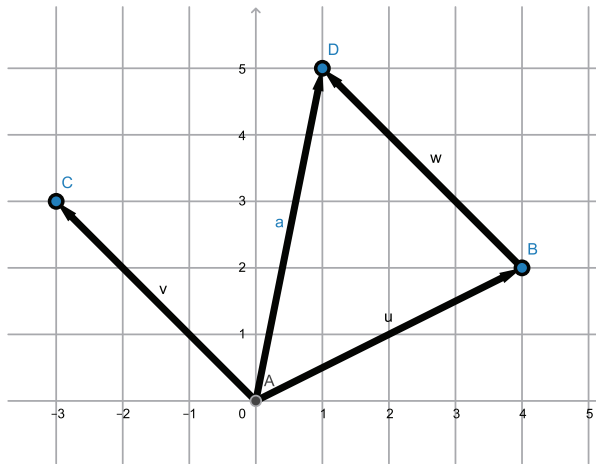


Ayo Bekerja Sama

Bentuklah kelompok yang terdiri atas 4 anggota. Setiap anggota membuat satu vektor yang berbeda dengan yang lain. Buatlah berbagai cara penjumlahan keempat vektor yang berbeda.

d. Penjumlahan Vektor secara Komponen

Selain secara grafis vektor juga dapat dijumlahkan secara komponen.



Gambar 3.30 Penjumlahan Secara Komponen

$$\mathbf{AC} + \mathbf{AB} = (-3 \ 3) + (4 \ 2) = (1 \ 5)$$

Penjumlahan secara komponen dan secara grafis memberikan hasil yang sama.



Ayo Berefleksi

1. Apakah kalian dapat melakukan penjumlahan vektor secara grafis?
2. Apakah kalian dapat melakukan penjumlahan vektor dengan menjumlahkan komponen-komponennya?

2. Pengurangan Vektor

Gambar di bawah menunjukkan *game Angry Birds*. Perhatikan gerak benda yang terlontar dari katapel.



Gambar 3.31 Game Angry Birds

Sumber: <https://indianexpress.com/>

Kekuatan *game*, salah satunya, adalah gerak objek-objek dalam *game* tersebut. *Games* menggunakan konsep vektor dan operasinya dalam pembuatannya, khususnya perpindahan dari satu lokasi ke lokasi lain.

Eksplorasi 3.5 Menentukan Pengurangan Vektor



Ayo Bereksplorasi

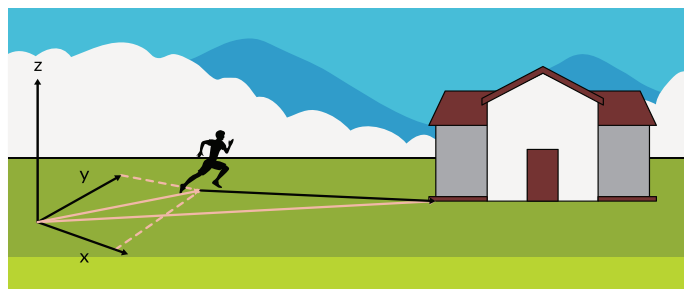
Seekor monyet berada pada posisi $(3, 4)$ akan mengambil pisang yang berada pada posisi $(2, 1)$. Gambarkan vektor posisi monyet, vektor posisi pisang, dan vektor perpindahan monyet untuk mengambil pisang. Gunakan kertas berpetak.

Berapa vektor perpindahan monyet dalam satuan $\mathbf{i}$ dan $\mathbf{j}$?

Bagaimana hubungan antara vektor posisi monyet, vektor posisi pisang, dan vektor perpindahan monyet dalam operasi vektor?

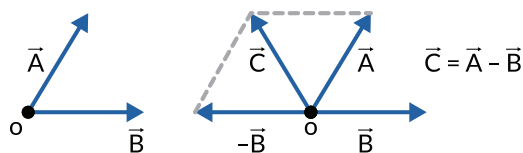
Dari eksplorasi ini kalian belajar bahwa vektor bisa juga dikurangkan selain dijumlahkan. **Hasil pengurangan vektor disebut sebagai resultan vektor.**

Perhatikan contoh operasi pengurangan vektor dalam *game* untuk mengetahui jarak orang dengan rumah jika vektor posisi orang dan rumah diketahui.



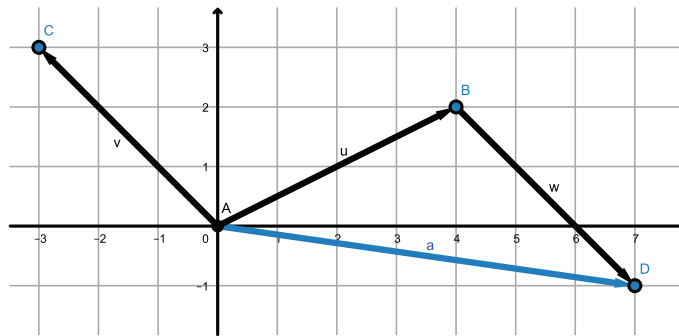
Gambar 3.32 Pengurangan Vektor dalam *Game*

Salah satu cara menyelesaikan soal pengurangan vektor dengan cara seperti yang ditunjukkan dalam gambar 3.33 di bawah ini. Arah vektor $\mathbf{OB}$ dibuat berlawanan dan dijumlahkan dengan vektor $\mathbf{OA}$.



Gambar 3.33 Pengurangan Dua Vektor

Pengurangan vektor dapat dilakukan secara komponen. Perhatikan dua vektor di bawah ini.



Gambar 3.34 Pengurangan Dua Vektor secara Komponen

$$\mathbf{AB} - \mathbf{AC} = \mathbf{AB} + (-\mathbf{AC}) = (4 \ 2) + (3 \ -3) = (7 \ -1)$$

a. Vektor Nol $\vec{0}$

Vektor nol adalah vektor dengan panjang nol dan tidak punya arah tertentu atau vektor dengan titik pangkal dan ujung yang sama. Vektor nol dinyatakan dengan titik secara grafis.

Jika Andi berjalan sejauh 100 m ke timur kemudian 100 m ke barat, maka Andi mengalami perpindahan 0.



Ayo Berefleksi

1. Apakah kalian dapat melakukan pengurangan vektor secara grafis?
2. Apakah kalian dapat melakukan pengurangan vektor dengan mengurangi komponen-komponennya?

3. Perkalian Skalar dengan Vektor

Eksplorasi 3.6 Perkalian Skalar dengan Vektor



Ayo Bereksplorasi

Kalian buat satu garis lurus melalui tanda bintang di dekat B, U, dan R. Ukur panjang garis BR, BU, dan UR.



Gambar 3.35 Peta Pulau Bali

Sumber: <https://moondoggiesmusic.com/peta-bali/#gsc.tab=0>



Ayo Berdiskusi

1. Nyatakan panjang vektor **BU** dan **UR** terhadap **BR**.
2. Hal apa yang sama dari ketiganya?

Kalian perhatikan vektor perpindahan dari Palimanan ke Pejagan (vektor **PG**) merupakan gabungan vektor perpindahan Palimanan–Kanci (vektor **PK**) dan vektor perpindahan Kanci–Pejagan (vektor **KG**).

Vektor **PK** = $\frac{4}{9}$ vektor **PG** dan vektor **KG** = $\frac{5}{9}$ vektor **PG**.

Vektor **KP** = $-\frac{4}{9}$ vektor **PG** dan vektor **GK** = $-\frac{5}{9}$ vektor **PG**.



Gambar 3.36 Palimanan--Pejagan

Sumber: <https://www.viva.co.id/arsip/262958-para-penguasa-tol-trans-jawa>

Vektor yang dikalikan dengan skalar positif menghasilkan vektor dengan panjang berbeda.

Vektor yang dikalikan dengan skalar negatif menghasilkan vektor dengan panjang dapat berbeda dan arah berlawanan.



Gambar 3.37 Perkalian Skalar dengan Vektor



Ayo Bekerja Sama

Buktikan perkalian skalar dengan vektor secara grafis (pada kertas berpetak) dan komponen memberikan hasil yang sama. Tentukan satu vektor terlebih dahulu. Setiap anggota dapat memilih skalar yang diinginkan.

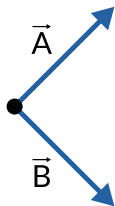


Ayo Berefleksi

1. Apakah kalian dapat melakukan perkalian skalar dengan vektor secara grafis?
2. Apakah kalian dapat melakukan perkalian skalar dengan vektor dengan mengalikan komponen-komponennya?

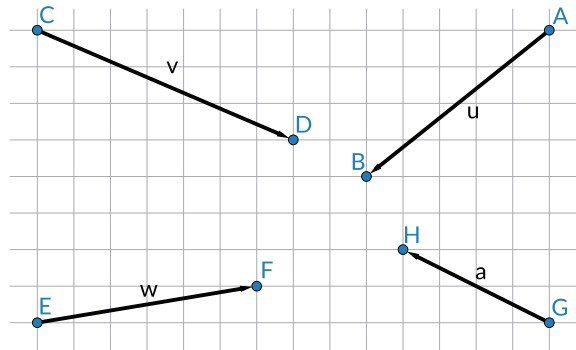
Latihan 3.5

1. Perhatikan dua vektor di bawah ini.



- a. Gambarkan $2\mathbf{A}$
- b. Gambarkan $3\mathbf{B}$
- c. Gambarkan $2\mathbf{A} + 3\mathbf{B}$

2. Buat dua titik $A(3, 2)$ dan $B(-6, 8)$ dalam sistem koordinat Kartesius.
 - a. Gambarkan vektor posisi $\mathbf{OA}$ dan $\mathbf{OB}$.
 - b. Gambarkan hasil pengurangan vektor $\mathbf{OB}$ dengan $\mathbf{OA}$.
 - c. Buat pengurangan kedua vektor dengan menggunakan vektor kolom.
3. Perhatikan gambar vektor-vektor di bawah ini. Operasikan vektor-vektor secara grafis dan komponen. Gunakan kertas berpetak untuk operasi vektor secara grafis. Tentukan juga panjang vektor hasil penjumlahan.



- a. $\mathbf{EF} + \mathbf{GH}$
 - b. $2\mathbf{EF} - \mathbf{GH}$
 - c. $\mathbf{EF} + \mathbf{GH} + \mathbf{CD}$
 - d. $\mathbf{EF} - \mathbf{GH} + 2\mathbf{CD}$
 - e. $\mathbf{EF} + \mathbf{GH} + \mathbf{CD} + \mathbf{AB}$
 - f. $\mathbf{EF} - 3\mathbf{GH} - \mathbf{CD}$
4. Perhatikan peta Papua di bawah ini.
- a. Gambarkan vektor Jayapura-Wamena, yaitu $\mathbf{JW}$ dan vektor Jayapura-Nabire, yaitu $\mathbf{JN}$.



- b. Gambarkan pengurangan vektor $\mathbf{JW}$ dengan vektor $\mathbf{JN}$.

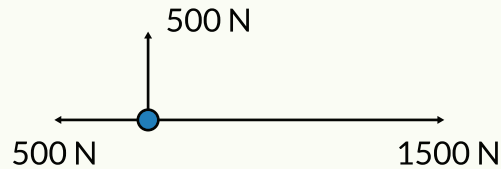
Latihan 3.6

1. Jika vektor $\mathbf{a} = (x_1 \ y_1)$ dan $\mathbf{b} = (x_2 \ y_2)$ tunjukkan bahwa $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$
2. Mengapa metode jajar genjang merupakan salah satu metode penjumlahan vektor?



Ayo Berpikir Kritis

3. Buktikan bahwa A, B, dan C kolinier terletak pada satu garis dengan menunjukkan bahwa AB dan BC paralel. Tentukan titik A, B, dan C terlebih dahulu.
4. Tentukan panjang vektor resultan.



5. Buatlah 3 vektor sembarang a, b, dan c pada kertas berpetak. Gambarkan hasil $2a + b - 2c$.



Ayo Menggunakan Teknologi

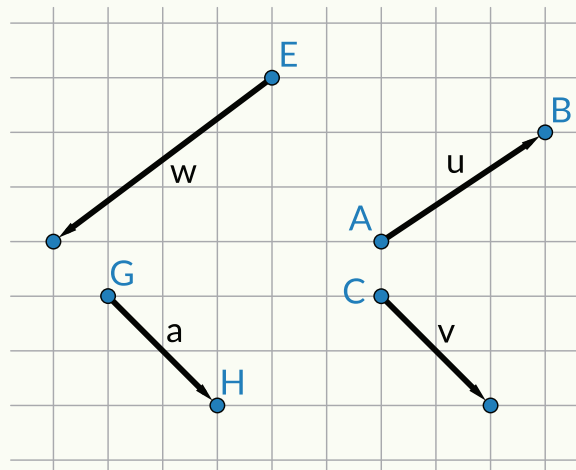
Kalian dapat menggunakan aplikasi GeoGebra untuk melakukan operasi vektor. <https://www.geogebra.org/>

Refleksi

1. Bagaimana menyatakan vektor?
2. Berapa cara menyatakan arah?
3. Apa itu vektor ekuivalen?
4. Bagaimana membuat vektor dalam sistem koordinat?
5. Bagaimana menentukan vektor dalam sistem koordinat?
6. Ada berapa jenis vektor?
7. Sifat apa saja yang dipenuhi oleh penjumlahan vektor?
8. Bagaimana cara melakukan penjumlahan vektor?
9. Bagaimana cara melakukan pengurangan vektor?
10. Bagaimana cara melakukan perkalian skalar dengan vektor?

Uji Kompetensi

1. Suatu vektor memiliki ujung di $A(3, -6, 0)$ dan pangkal di $B(5, 0, 8)$.
Nyatakan vektor $\mathbf{AB}$ dalam komponen-komponennya dan tentukan panjang vektor.
2. Apakah penjumlahan dua vektor dengan besar berbeda dapat menghasilkan vektor nol?
3. Apakah penjumlahan tiga vektor dengan besar berbeda dapat menghasilkan vektor nol?
4. Kalian naik sepeda dengan kelajuan 2 m/detik ke utara. Angin bertiup ke selatan dengan kelajuan 0,4 m/detik. Ke arah mana kalian bergerak dan berapa kelajuannya?
5. Perhatikan gambar di bawah ini.



Gambarkan secara grafis dan tentukan komponen-komponennya dari $2\mathbf{CD} + \mathbf{AB} - 3\mathbf{EF} - 2\mathbf{GH}$.

Gunakan kertas berpetak untuk menggambar.